

LES FONCTIONS DE REFERENCE

I. La fonction carré :

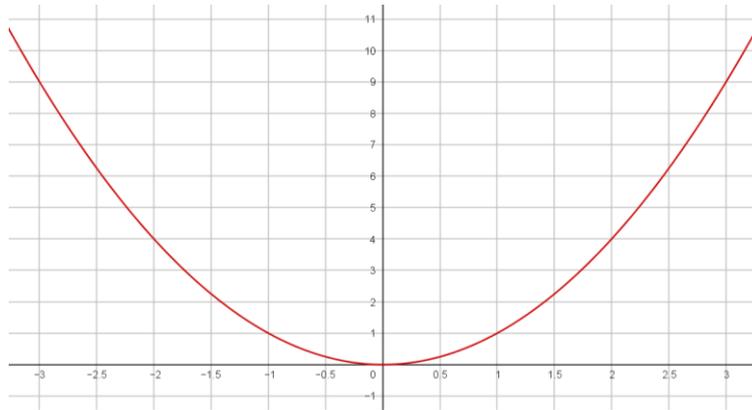
1) Définition :

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une **parabole**

4) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗
		0	

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

On peut donc dire que pour tout x , $x^2 \geq 0$

Ordre et fonction carré :

$$2 < 5 \quad \text{donc} \quad 2^2 < 5^2$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$$-6 < -3 \quad \text{donc} \quad (-6)^2 > (-3)^2$$

car la fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, elle perturbe l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

On dira que la fonction carré conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty [$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le sens inverse de leurs carrés.

On dira que la fonction carré inverse l'ordre sur $] -\infty ; 0]$.

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$$x^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 5 \quad ; \quad x^2 = -3 \quad ; \quad x^2 > 0 \quad ; \quad x^2 < 6 \quad ; \quad x^2 \geq 4 \quad ; \quad x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$$

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{5} \quad S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

$$x^2 = -3 \quad S = \emptyset \quad \text{car un carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.}$$

$$x^2 > 0 \quad S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\quad \text{Tous les réels sauf 0 ont un carré strictement positif.}$$

$$x^2 < 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \quad S =]-\sqrt{6}; \sqrt{6}[$$

$$x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{4} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{4} \Leftrightarrow x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2 \quad S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$$

II. La fonction inverse :

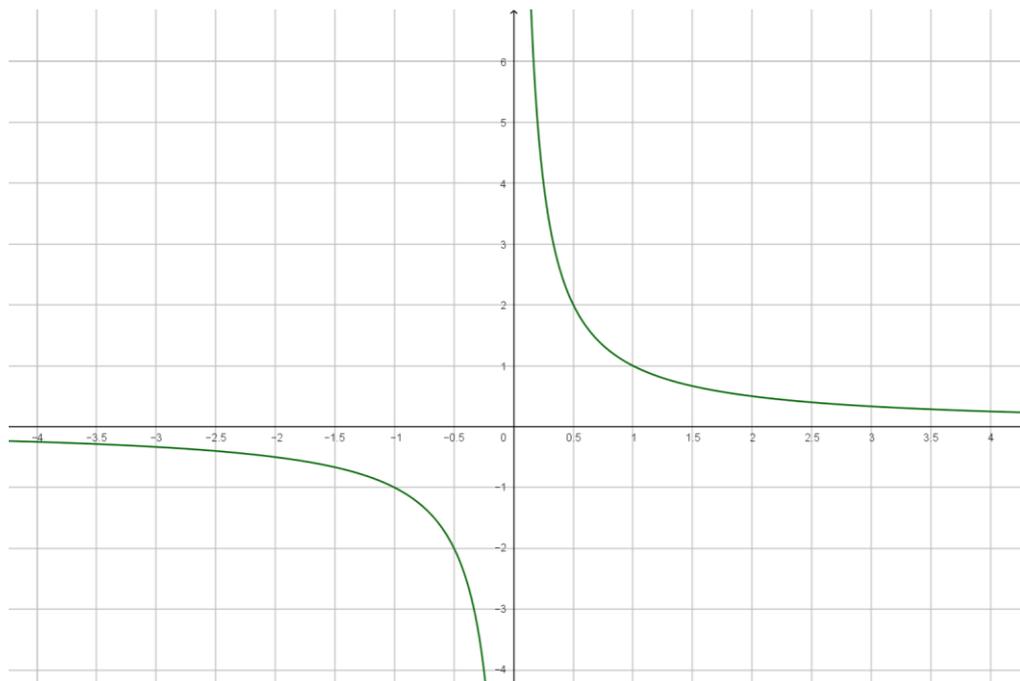
1) Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur \mathbb{R} privé de 0, noté $\mathbb{R}-\{0\}$ ou \mathbb{R}^* ou $]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. 0 est la valeur interdite de la fonction inverse.

2) Tableau de valeurs :

x	-4	-2	-1	-0,8	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,8	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{5}{4}$	-2	-4	4	2	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une **hyperbole**

4) Sens de variation de la fonction inverse

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		

La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0[$ et **strictement décroissante** sur $] 0 ; +\infty [$. 0 est une valeur interdite.

Ordre et fonction inverse :

$2 < 5$ donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty [$.

$-6 < -3$ donc $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0 [$.

La fonction inverse perturbe l'ordre sur $]-\infty ; 0 [$ et sur $] 0 ; +\infty [$

Application :

Résoudre algébriquement :

$$\frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{x} = 1 \quad ; \quad \frac{1}{x} = -2 \quad ; \quad \frac{1}{x} > 3 \quad ; \quad \frac{1}{x} < -1 \quad ; \quad \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{x} = -x + 2$$

$$\frac{1}{x} = 0 \quad \text{Une fraction dont le numérateur vaut 1 ne peut pas être nulle donc } S = \emptyset$$

$$\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{ 1 \}$$

$$\frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x < \frac{1}{3} \quad \text{donc } S =]0; \frac{1}{3}[$$

$$\frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x > -1 \quad \text{donc } S =]-1; 0[$$

$$\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x \leq -2 \text{ ou } x > 0 \quad \text{donc } S =]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} = -x + 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + x^2 - 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x \neq 0 \\ &\quad S = \{ 1 \} \end{aligned}$$

III. La fonction racine carrée :

1) Généralités:

La racine carrée d'un nombre réel **positif** x est le nombre réel **positif** dont le carré est x .
Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x} = a$ avec $a \geq 0$ et $a^2 = x$

Exemple : $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et $2 > 0$

Attention ! $\sqrt{4} \neq -2$ car $-2 < 0$ pourtant $(-2)^2 = 4$

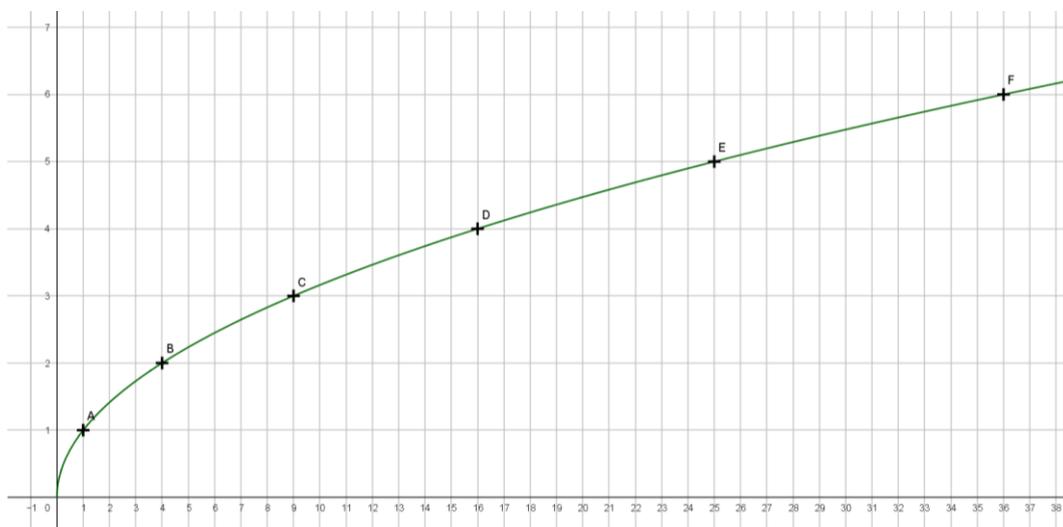
L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[0 ; +\infty[$

La racine carrée d'un réel négatif n'existe pas !

2) Tableau de valeurs :

x	0	1	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6

3) Courbe représentative :



4) Sens de variation de la fonction racine carrée

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	

↗

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Le minimum de la fonction racine carrée est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

On peut donc dire pour tout x , $\sqrt{x} \geq 0$

Ordre et fonction racine carrée :

$$2 < 5 \quad \text{donc} \quad \sqrt{2} < \sqrt{5}$$

car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

On dira que la fonction racine carrée conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\} \quad ;$$

$$\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 25 \quad S = \{ 25 \};$$

$$\sqrt{x} = -3 \quad S = \emptyset \quad \text{car une racine carrée est toujours positive ;}$$

$$\sqrt{x} > 0 \quad S = [0 ; + \infty [\quad \text{car une racine carrée est toujours positive} \quad ;$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} < 6 &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 < 6^2 \quad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } [0 ; + \infty [\\ &\Leftrightarrow x < 36 \quad S = [0 ; 36 [\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \geq 4 &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \geq 4^2 \quad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } [0 ; + \infty [\\ &\Leftrightarrow x \geq 16 \quad S = [16 ; + \infty [\end{aligned}$$

IV. La fonction cube :

1) a) Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 = x \times x \times x$.

b) Exemples :

- puisque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, le cube de 2 vaut 8.
- le cube de -3 est $(-3) \times (-3) \times (-3) = -3 \times 3 \times 3 = -27$.
(le produit de trois nombres négatifs est négatif) .
Le cube de -3 se note $(-3)^3$ et on a $(-3)^3 = -27$.
- REMARQUE : ne pas confondre $(-3)^3$ et -3^3 , même si le résultat est le même .
 $(-3)^3$ est le cube de -3 et -3^3 est l'opposé du cube de 3.
- Utiliser sa calculatrice pour effectuer les calculs suivants :
 $-2,5^3 = -15,625$ $(-2,5)^3 = -15,625$ $-2,5^2 = -6,25$ $(-2,5)^2 = 6,25$

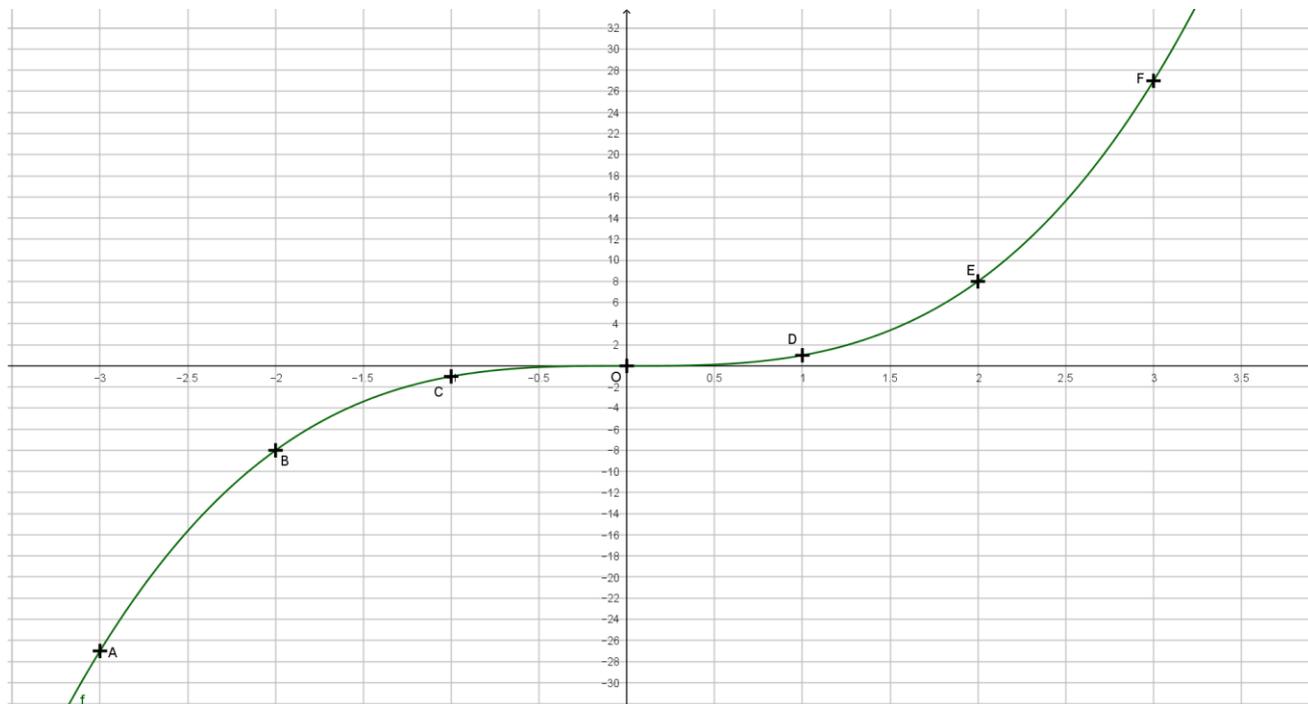
Compléter :

x	-10	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	0	$\sqrt{2}$	$-1,4$	$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
le cube de x	-1000	$\frac{1}{27}$	$\frac{27}{64}$	0	$2\sqrt{2}$	$-2,744$	$\frac{125}{27}$

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est **une courbe symétrique par rapport à l'origine du repère**.
O est le centre de symétrie de la courbe de la fonction cube.

4) Sens de variation de la fonction cube

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Ordre et fonction cube :

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$-6 < -3$ donc $(-6)^3 < (-3)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.

On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le sens inverse de leurs cubes.

On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $] -\infty ; 0]$.

Si a et b sont deux réels quelconques, leur cube sont rangés dans le même ordre.

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

Applications :

Exercice 1 : On donne $a = (-2,1)^3$, $b = -3,5^3$, $c = (\frac{2}{3})^3$ et $d = (\sqrt{7})^3$.

Comparez sans les calculer ces 4 réels.

$$-3,5^3 = (-3,5)^3 \quad \text{et} \quad -3,5 < -2,1 < \frac{2}{3} < \sqrt{7}$$

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} donc elle ne perturbe pas l'ordre.

$$\text{donc} \quad -3,5^3 < (-2,1)^3 < (\frac{2}{3})^3 < (\sqrt{7})^3$$

Exercice 2 : L'arête d'un cube est notée a . On sait que $4,32 < a < 4,37$ en cm. Déterminer un encadrement du volume V de ce solide en mm^3 (encadrement à l'aide de décimaux arrondis au dixième).

$$V = a^3 \quad \text{et}$$

$$4,32 < a < 4,37$$

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} donc elle ne perturbe pas l'ordre.

$$\text{donc} \quad 4,32^3 < a^3 < 4,37^3 \quad \text{donc} \quad 80,62157 < V < 83,45345 \text{ en } \text{cm}^3$$

$$\text{donc} \quad 80\,621,6 < V < 83\,453,5 \text{ en } \text{mm}^3 \text{ arrondis au dixième.}$$

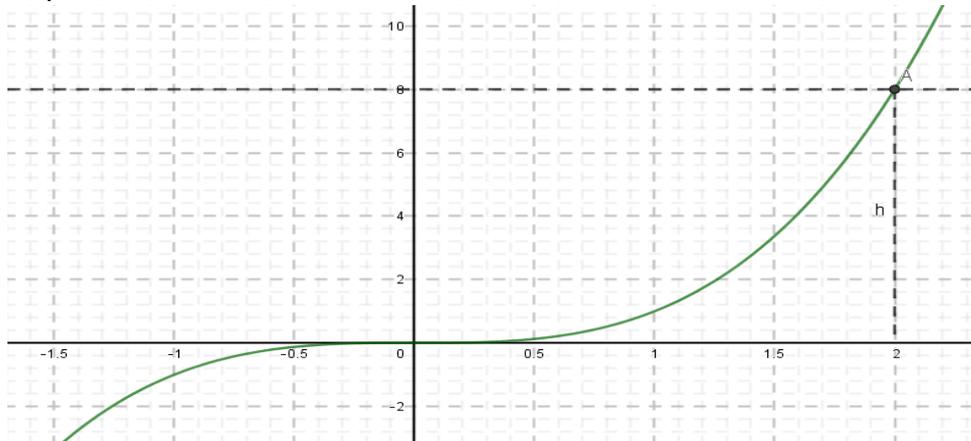
5) Résolution de l'équation $x^3 = a$ où a est un nombre connu.

Exemple 1 :

$a = 8$. Résolvons $x^3 = 8$. Il s'agit de déterminer tous les nombres dont le cube vaut 8.

Il ne peut pas y en avoir plusieurs solutions puisque la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La courbe représentative de la fonction cube est coupée une seule fois par la droite horizontale d'équation $y = 8$.



$x^3 = 8$ a une seule solution qui est la valeur 2, c'était facile...

Vocabulaire : On dit que 2 est la racine cubique de 8.

Notations : il y a deux possibilités

➤ la racine cubique de 8 se note $\sqrt[3]{8}$.

➤ la racine cubique de 8 se note $8^{1/3}$

explication : $8^{1/3}$ est la racine cubique de 8 donc son cube vaut 8.

en effet $(8^{1/3})^3 = 8^{1/3 \times 3} = 8^1 = 8$

(cohérence avec les règles de calculs connus sur les exposants entiers)

Généralisation : La racine cubique de a est LE nombre dont le cube vaut a , il se note $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{1/3}$.

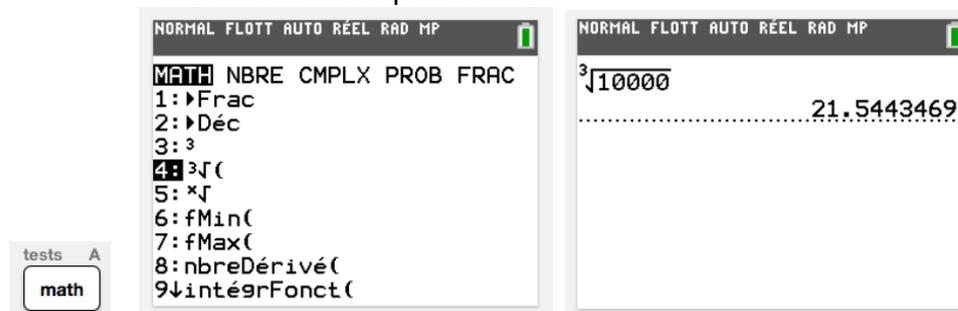
➤ $\sqrt[3]{125} = 5$ puisque $5^3 = 125$.

➤ la racine cubique de 40 est $\sqrt[3]{40} = 40^{1/3}$

De plus $3,41^3 = 39,651821$ et que $3,42^3 = 40,001688$

donc $\sqrt[3]{40}$ est comprise entre les valeurs 3,41 et 3,42.

➤ savoir calculer une racine cubique avec sa calculatrice.



$\sqrt[3]{10\,000} \approx 21,54$ au centième près.