**Nom, Prénom : ……………………………………………………** **Lundi 14 Avril 2025**

**Term Spé Interrogation ( 30 min )**

**/10**

**Exercice 1:**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

**Exercice 2:**

Déterminer les primitives de :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3x$ 2) $g(x) = \dfrac{5}{(-2x+1)^2} + 3$ 3) $h(x) = 1 - \cos(2x)$

**Exercice 3 :**

On donne $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x) - \cos(2x)$

1) Démontrer que $f$ est $\pi$-périodique.
2) Démontrer que $f$ est paire.
3) Montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x)$ .

**Nom, Prénom : ……………………………………………………** **Lundi 14 Avril 2025**

**Term Spé Interrogation ( 30 min )**

**/10**

**Exercice 1:**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$.

1) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{3x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 3y = 0$.
3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 3$.

**Exercice 2:**

Déterminer les primitives de :

1) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{x^2}$ 2) $g(x) = \dfrac{3}{(2x-3)^2}$ 3) $h(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

**Exercice 3 :**

On donne $f(x) = 2\cos^2(x) - \sin(2x)$

1) Démontrer que $f$ est $\pi$-périodique.
2) $f$ est-elle paire ? Justifier.
3) Montrer que $f'(x) = -2(\sin(2x) - \cos(2x))$.

<u>**Term Spé Correction Interrogation ( 30 min )**</u>

**Exercice 1:**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

   $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - x\,e^{-x}$ .
   $f'(x) + f(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} + x\,e^{-x} = e^{-x}$ donc $f$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

   $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = y$ Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions h telles que $h(x) = Ce^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

   Les solutions de (E) sont les fonctions g telles que $g(x) = f(x) + h(x) = Ce^{x} + x\,e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.
   $g(0) = 2 \Leftrightarrow Ce^{0} + 0 \times e^{0} = 2 \Leftrightarrow C = 2$

**Exercice 2**: Déterminer les primitives de :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3x$ $\qquad F(x) = -\dfrac{1}{x} + 3 \times \dfrac{x^2}{2} + C = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = \dfrac{5}{(-2x+1)^2} + 3$ $\quad u(x) = -2x + 1 \quad u'(x) = -2$ donc $g(x) = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$

$$G(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{-1}{-2x+1} + C$$

$$G(x) = \frac{5}{-4x+2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

3) $h(x) = 1 - \cos(2x)$ $\quad u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$ donc $h(x) = 1 - \dfrac{1}{2} \times u'(x) \times \cos(u(x))$

$$H(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exercice 3 :** On donne $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x) - \cos(2x)$

1) Démontrer que $f$ est $\pi$-périodique.

   $f(x+\pi) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x+\pi) - \cos(2(x+\pi)) = \dfrac{1}{2}(-\sin(x))^2 - \cos(2x+2\pi) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x) - \cos(2x) = f(x)$

   car $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ car cos est $2\pi$ périodique.

   On a donc $f(x+\pi) = f(x)$ donc $f$ est $\pi$-périodique

2) Démontrer que $f$ est paire.
   $f(-x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(-x) - \cos(-2x) = \dfrac{1}{2}(-\sin(x))^2 - \cos(2x) = f(x)$ donc $f$ est paire.
   En effet $\sin(-x) = -\sin(x)$ car sin est impaire et $\cos(x) = \cos(-x)$ car cos est paire.

3) Montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x)$ .

   $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos(x) \times \sin(x) - (-2\sin(2x))$ $\qquad$ Formule : $(u^2)' = 2u'u$

   $= \dfrac{1}{2} \times \quad \sin(2x) \quad + 2\sin(2x) = \dfrac{5}{2}\sin(2x)$

## Term Spé Correction Interrogation ( 30 min )

**Exercice 1:** On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$.

1) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{3x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

   $f'(x) = 1 \times e^{3x} + x \times (3\,e^{3x}) = e^{3x} + 3\,x\,e^{3x}$.
   $f'(x) + f(x) = e^{3x} + 3x\,e^{3x} + 3x\,e^{3x} = e^{3x}$ donc $f$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 3y = 0$.

   $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions h telles que $h(x) = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

   Les solutions de (E) sont les fonctions g telles que $g(x) = f(x) + h(x) = Ce^{3x} + x\,e^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 3$.
   $g(0) = 3 \Leftrightarrow Ce^0 + 0 \times e^0 = 3 \Leftrightarrow C = 3$

**Exercice 2**: Déterminer les primitives de :

1) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{x^2}$ $\quad F(x) = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{x^2}{2} + 3 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) + C = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = \dfrac{3}{(2x-3)^2}$ $\quad u(x) = 2x - 3 \quad u'(x) = 2$ donc $g(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$

$$G(x) = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{2x-3} + C$$

$$G(x) = \frac{-3}{4x-6} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

3) $h(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad u(x) = 3x + \dfrac{\pi}{2} \quad u'(x) = 3$ donc $h(x) = \dfrac{1}{3} \times u'(x) \times \cos(u(x))$

$$H(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exercice 3 :** On donne $f(x) = 2\cos^2(x) - \sin(2x)$

1) Démontrer que $f$ est $\pi$-périodique.

   $f(x+\pi) = 2\cos^2(x+\pi) - \sin(2(x+\pi)) = 2(-\cos(x))^2 - \sin(2x + 2\pi) = 2\cos^2(x) - \sin(2x) = f(x)$

   car $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ car cos est $2\pi$ périodique.

   On a donc $f(x+\pi) = f(x)$ donc $f$ est $\pi$-périodique

2) $f$ est-elle paire ? Justifier.

   $f(-x) = 2\cos^2(-x) - \sin(-2x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x) \neq f(x)$ donc $f$ n'est pas paire.
   En effet $\cos(-x) = \cos(x)$ car cos est paire et $\sin(x) = -\sin(-x)$ car sin est impaire.

3 ) Montrer que $f'(x) = -2(\sin(2x) - \cos(2x))$.

$f'(x) = 2 \times 2(-\sin(x)) \times \cos(x) - 2\cos(2x)$ $\qquad$ Formule : $(u^2)' = 2u'u$
$= -2 \times \sin(x) \times \cos(x) - 2\cos(2x)$
$= -2\sin(2x) - 2\cos(2x)$
$= -2(\sin(2x) + \cos(2x))$