LES FONCTIONS DE REFERENCE

I. La fonction carré :

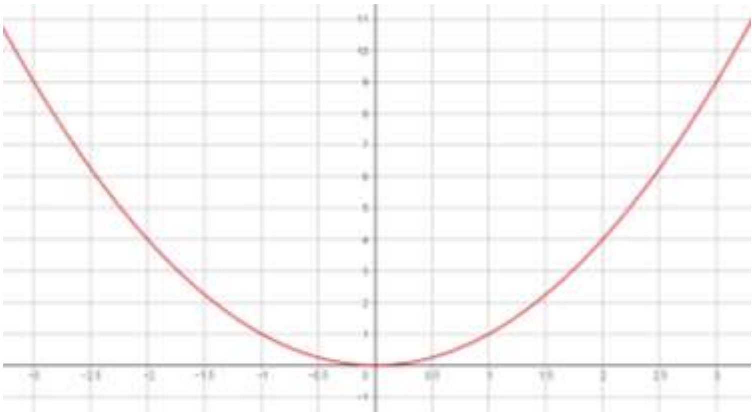
1) Définition :

La fonction carré est la fonction définie sur R par $f(x) = x^2$.

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une

4) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

La fonction carré est

Le minimum de la fonction carré est

Il est atteint pour

On peut donc dire que pour tout x ,

Ordre et fonction carré :

$2 < 5$ donc $2^2 < 5^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$-6 < -3$ donc $(-6)^2 > (-3)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$, elle perturbe l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
On dira que la fonction carré conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le sens inverse de leurs carrés.
On dira que la fonction carré inverse l'ordre sur $]-\infty ; 0]$.

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$x^2 = 0$; $x^2 = 5$; $x^2 = -3$; $x^2 > 0$; $x^2 < 6$; $x^2 \geq 4$; $x^2 = 2x - 1$

II. La fonction inverse :

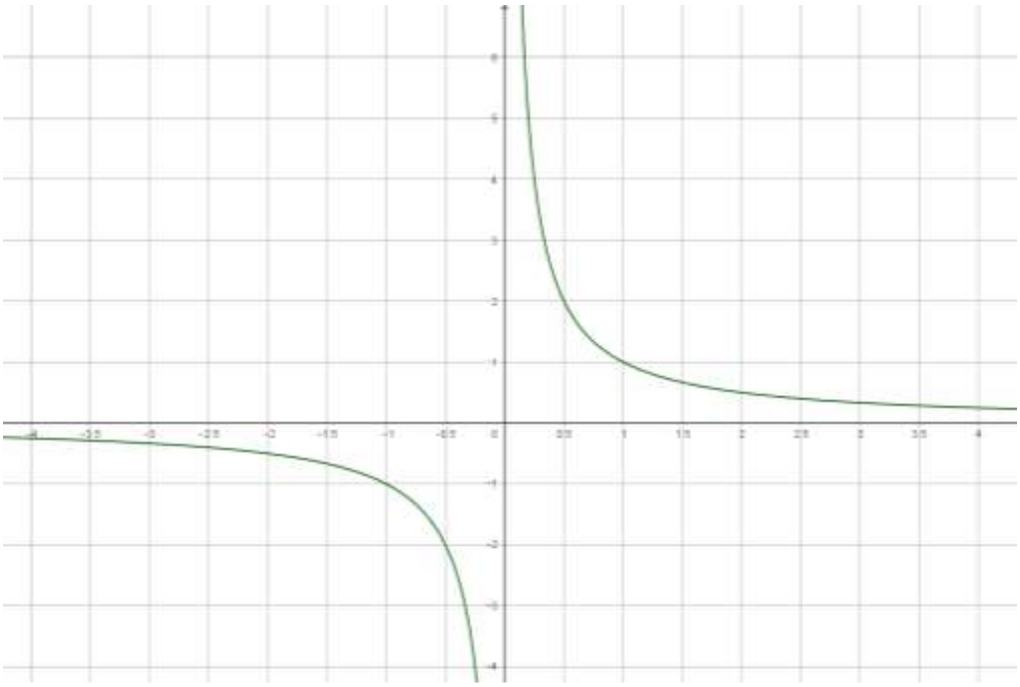
1) Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur ℝ privé de 0, noté ℝ–{0} ou $\mathbb{R}^*$ ou]– ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. 0 est la valeur interdite de la fonction inverse.

2) Tableau de valeurs :

x	– 4	– 2	– 1	– 0,8	– 0,5	– 0,25	0,25	0,5	0,8	1	2	4
$f(x)$												

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une

4) Sens de variation de la fonction inverse

Tableau de variation :

x	– ∞	0	+ ∞
$f(x)$	↘	‖	↘

La fonction inverse est

Ordre et fonction inverse :

$2 < 5$ donc $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur] 0 ; +∞ [.

$-6 < -3$ donc $-\dfrac{1}{6} > -\dfrac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur] – ∞ ; 0 [.

La fonction inverse perturbe l'ordre sur] – ∞ ; 0 [et sur] 0 ; + ∞ [

Application :

Résoudre algébriquement :

$\dfrac{1}{x} = 0$; $\dfrac{1}{x} = 1$; $\dfrac{1}{x} = -2$; $\dfrac{1}{x} > 3$; $\dfrac{1}{x} < -1$; $\dfrac{1}{x} \geq -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{x} = -x + 2$

III. La fonction racine carrée :

1) Généralités:

La racine carrée d'un nombre réel **positif** x est le nombre réel **positif** dont le carré est x .

Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x} = a$ avec $a \geq 0$ et $a^2 = x$

Exemple : $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et $2 > 0$

Attention ! $\sqrt{4} \neq -2$ car $-2 < 0$ pourtant $(-2)^2 = 4$

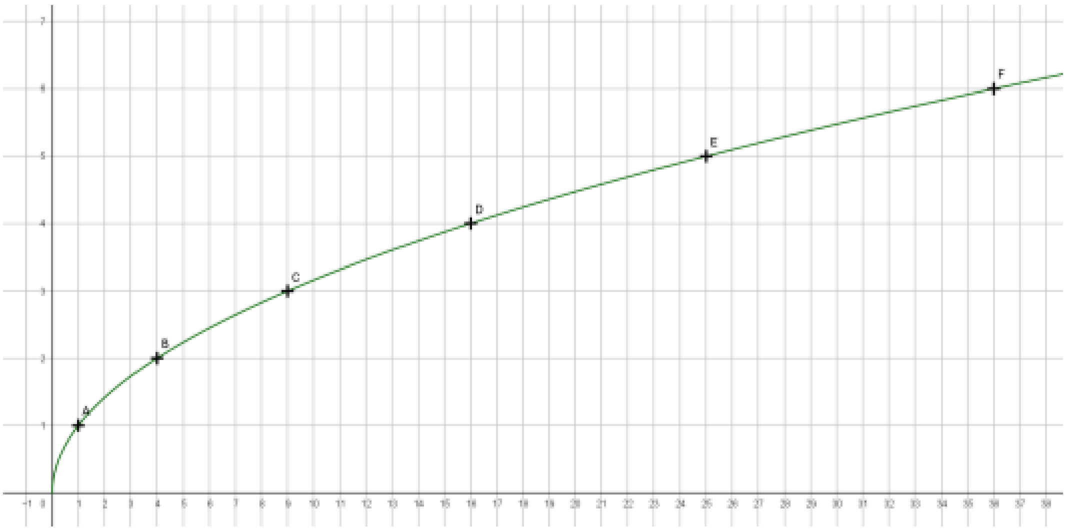
L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est [0 ; + ∞ [

La racine carrée d'un réel négatif n'existe pas !

2) Tableau de valeurs :

x	0	1	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6

3) Courbe représentative :



4) Sens de variation de la fonction racine carrée

Tableau de variation :

x	0 $\qquad$ + ∞
$f(x)$	0 $\nearrow$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [

Le minimum de la fonction racine carrée est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

On peut donc dire que pour tout x , $\sqrt{x} \geq 0$

Ordre et fonction racine carrée :

$2 < 5$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; +∞ [, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.
On dira que la fonction racine carrée conserve l'ordre sur [0 ; + ∞ [

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$\sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 5$; $\sqrt{x} = -3$; $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x} < 6$; $\sqrt{x} \geq 4$

IV. La fonction cube :

1) a) Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}$.

b) Exemples :

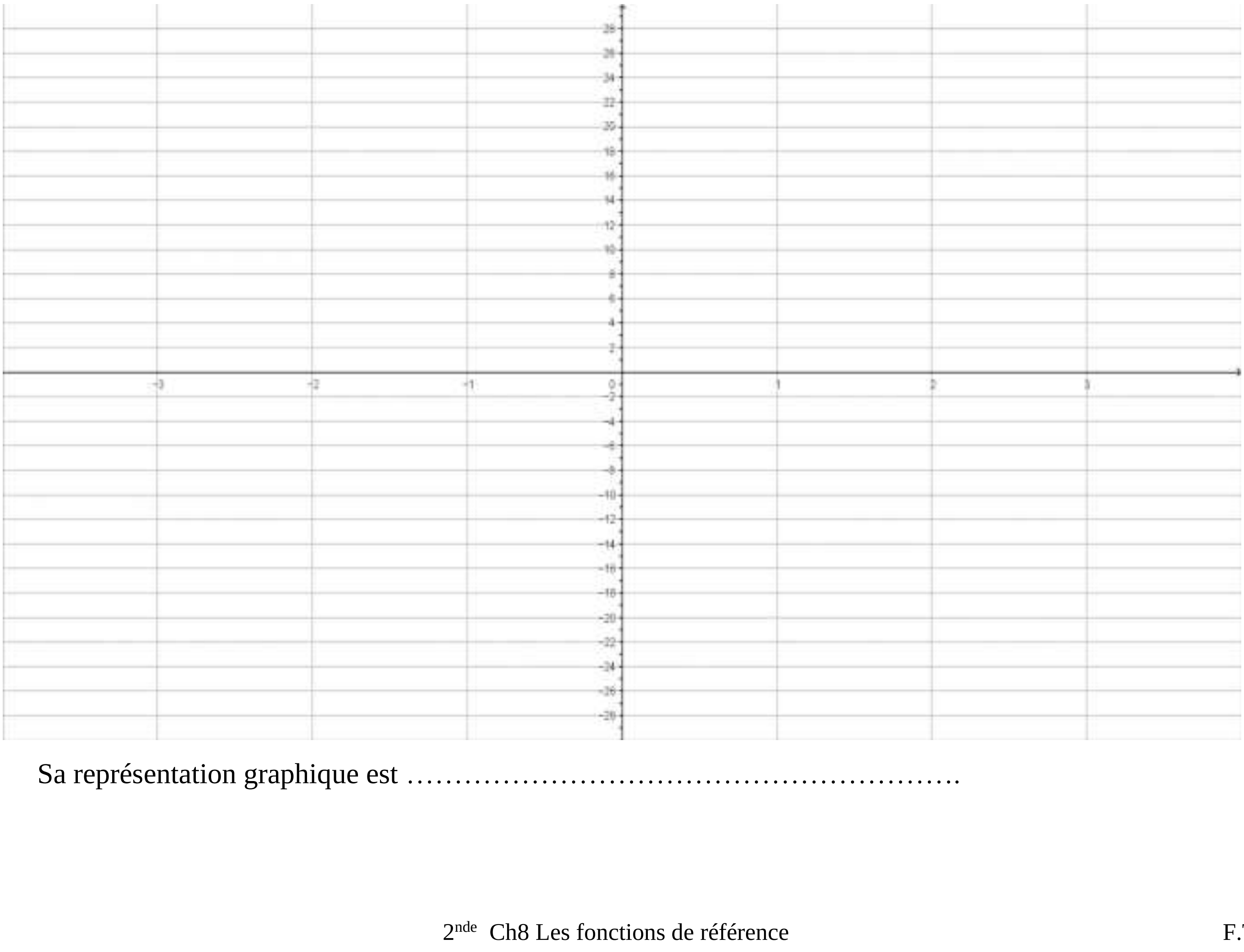
- puisque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, le cube de 2 vaut 8.
- le cube de -3 est $(-3) \times (-3) \times (-3) = -3 \times 3 \times 3 = -27$.
  (le produit de trois nombres négatifs est négatif) .
  Le cube de -3 se note $(-3)^3$ et on a $(-3)^3 = -27$.
- REMARQUE : ne pas confondre $(-3)^3$ et -3^3 , même si le résultat est le même .
  $(-3)^3$ est le cube de -3 et -3^3 est l'opposé du cube de 3.
- Utiliser sa calculatrice pour effectuer les calculs suivants :
  $-2{,}5^3$ = ……………… $(-2{,}5)^3$ = ……………… $-2{,}5^2$ = ……………… $(-2{,}5)^2$ = ………………
  Compléter :

x	-10	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	0	$\sqrt{2}$	$-1{,}4$	$2-\frac{1}{3}$
le cube de $\boldsymbol{x}$							

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est ………………………………………………….

4) Sens de variation de la fonction cube

Tableau de variation :

x	
$f(x)$	

La fonction cube est ……………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

Ordre et fonction cube :

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$-6 < -3$ donc $(-6)^3 < (-3)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $]-\infty ; 0]$.

Si a et b sont deux réels quelconques, leurs cubes sont rangés dans le même ordre.

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

Applications :

Exercice 1 : On donne $a = (-2{,}1)^3$, $b = -3{,}5^3$, $c = (\frac{2}{3})^3$ et $d = (\sqrt{7})^3$.

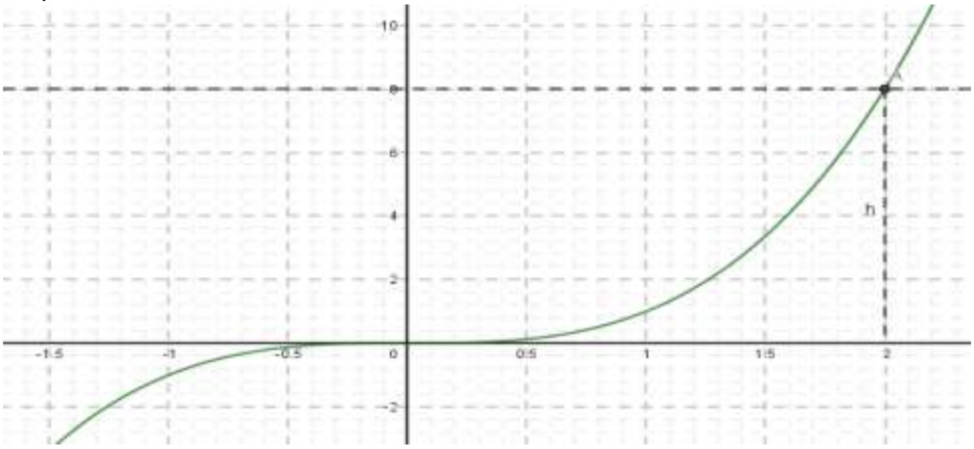
Comparez sans les calculer ces 4 réels .

Exercice 2 : L'arête d'un cube est notée a. On sait que $4{,}32 < a < 4{,}37$ en cm.
Déterminer un encadrement du volume V de ce solide en mm^3 (encadrement à l'aide de décimaux arrondis au dixième).

5) Résolution de l'équation $x^3 = a$ où a est un nombre connu.

Exemple 1 :

$a = 8$. Résolvons $x^3 = 8$. Il s'agit de déterminer tous les nombres dont le cube vaut 8.
Il ne peut pas y en avoir plusieurs solutions puisque la fonction cube est strictement croissante sur IR.
La courbe représentative de la fonction cube est coupée une seule fois par la droite horizontale d'équation $y = 8$.



$x^3 = 8$ a une seule solution qui est la valeur 2, c'était facile…

Vocabulaire : On dit que 2 est la racine cubique de 8.
Notations : il y a deux possibilités

- la racine cubique de 8 se note $\sqrt[3]{8}$.
- la racine cubique de 8 se note $8^{1/3}$

  explication : $8^{1/3}$ est la racine cubique de 8 donc son cube vaut 8 .
  en effet $(8^{1/3})^3 = 8^{1/3 \times 3 =} = 8^1 = 8$
  (cohérence avec les règles de calculs connus sur les exposants entiers)

Généralisation : La racine cubique de a est **LE** nombre dont le cube vaut a , il se note $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{1/3}$.

- $\sqrt[3]{125} = 5$ puisque $5^3 = 125$.
- la racine cubique de 40 est $\sqrt[3]{40} = 40^{1/3}$
  De plus $3{,}41^3 = 39{,}651821$ et que $3{,}42^3 = 40{,}001688$
  donc $\sqrt[3]{40}$ est comprise entre les valeurs 3,41 et 3,42.

- savoir calculer une racine cubique avec sa calculatrice.

$\sqrt[3]{10\ 000} \approx 21{,}54$ au centième près.