Amérique du nord sujet 1 mai 2024 Exercices 2 et 3

Exercice 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t\\ y &=& 1\\ z &=& -3+3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+4t\\ y &=& t\\ z &=& 3\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3t\\ y &=& t\\ z &=& 3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 1\\ z &=& 3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+4t\\ y &=& 6t\\ z &=& 4-2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+3k\\ y &=& -1-2k\\ z &=& 1+k\end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$

Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).
Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$
c. $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

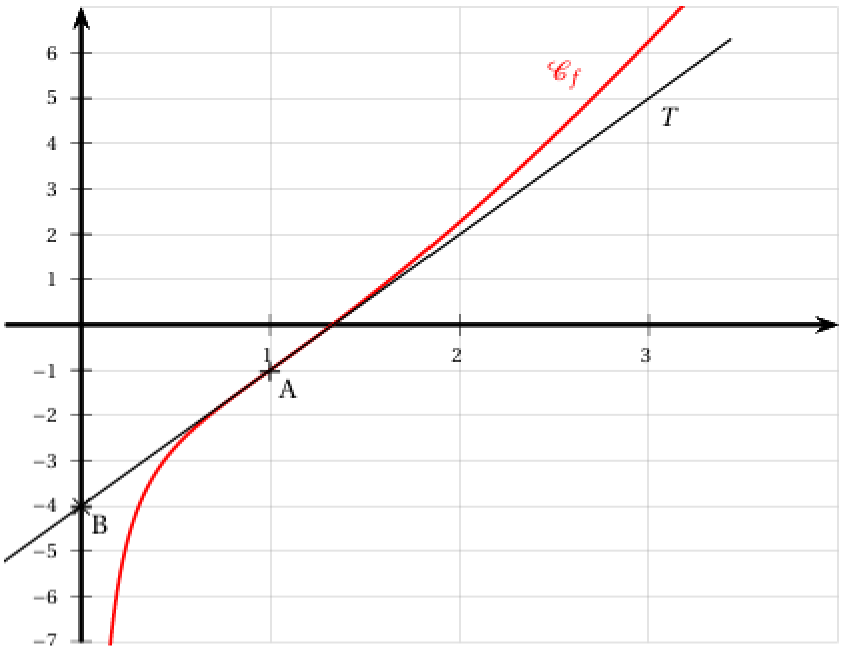
EXERCICE 3 **5 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1~;~-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0~;~-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

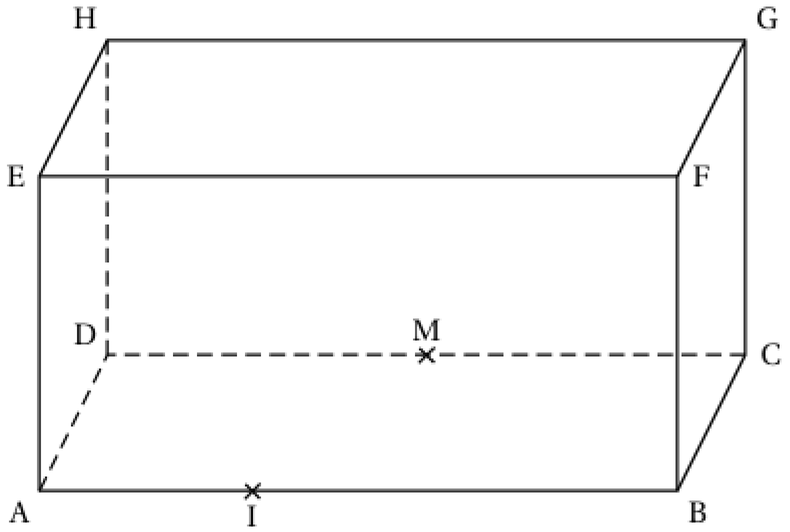
3. a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Amérique du Nord sujet 2 Mai 2024 Exercice 2

Exercice 2 **5 points**

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

   c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF). Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Centres étrangers Sujet 1 Juin 2024 Exercice 4

EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points $A(-2 ; 0 ; 2)$, $B(-1 ; 3 ; 0)$, $C(1 ; -1 ; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 3t \\ z &=& 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3s \\ y &=& -1-5s \\ z &=& 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

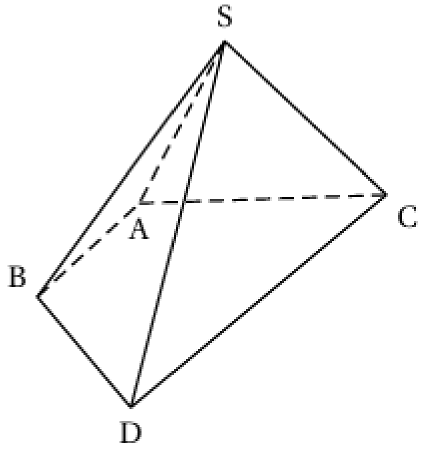
b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

Asie Sujet 1 Juin 2024 Exercice 2

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1); B(4 ; −1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).

Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Asie Sujet 2 Juin 2024 Exercices 1 et 4

EXERCICE 1 — 5,5 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : \quad 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

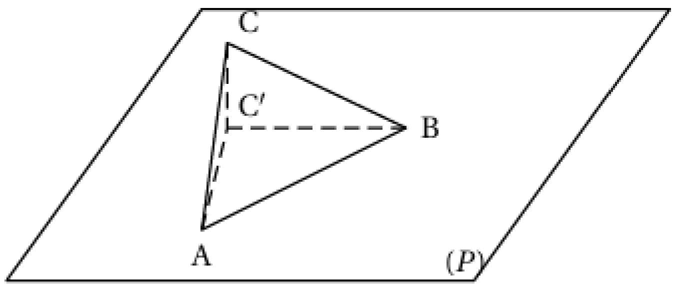
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1 ; 0 ; 1), B(2 ; -1 ; 1) \text{ et } C(-4 ; -6 ; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $C'(0 ; -2 ; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
   $\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$
   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

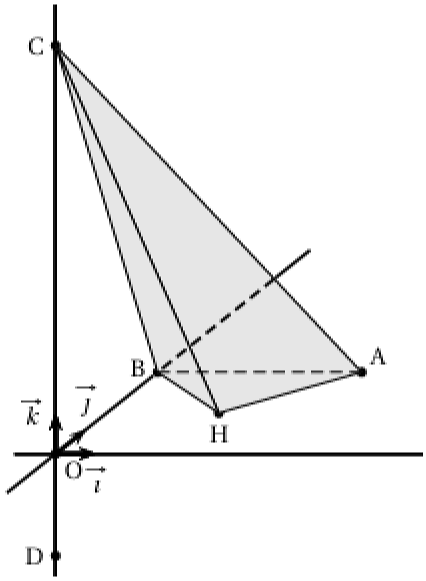
1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2.
   a. Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.

   b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

   c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Métropole Sujet 1 Juin 2024 Exercices 3 et 4

Exercice 3 — 5 points



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et $D\left(0 ; 0 ; -\dfrac{5}{2}\right)$.

1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2} ; \dfrac{5}{2} ; 0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.

   d. Étudier la convexité de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0~;~+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1~;~2]$.

   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0~;~+\infty[$.

   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0~;~1]$ par : $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0~;~1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0~;~1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

   b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0~;~1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.