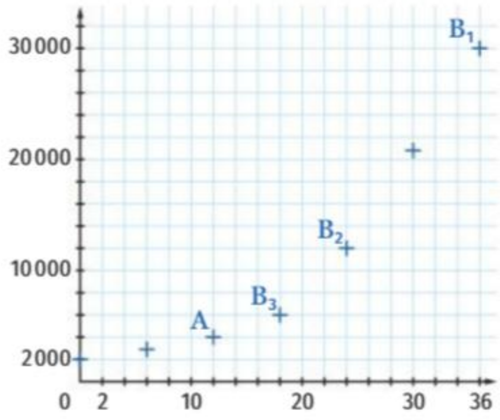
Fiche de groupe Le nombre dérivé et les tangentes à une courbe

Exercice 1 :

On considère une culture de bactéries dont on relève la population toutes les six heures. On a consigné les résultats dans le tableau suivant.

Durée t (en heure)	0	6	12	18	24	30	36
Population $P(t)$ (en nombre de bactéries)	2000	2900	4000	6000	12000	20800	30000



Le but de cette activité est d'estimer la vitesse de croissance de la population à la 12ᵉ heure (au point A sur le graphique).

Question préliminaire : À l'aide du tableau, justifier que la vitesse de développement n'est pas constante. Comment observe-t-on ce résultat sur le graphique ?

1 On note P la fonction modélisant la population de bactéries. Tracer la courbe représentative de P en fonction de la durée t. On reliera les points à l'aide d'une seule courbe à main levée.

On appelle A, B_1, B_2 et B_3 les points d'abscisse respective 12, 36, 24 et 18.

2 **a)** Entre la 12ᵉ et la 36ᵉ heure, de quelle quantité la population de bactéries a-t-elle augmenté ?

À quelle vitesse moyenne, en nombre de bactéries par heure, cette population a-t-elle augmenté ?

Cette vitesse est aussi appelée **taux de variation** de P entre 12 et 36.

b) Déterminer le taux de variation de P entre 12 et 24, puis entre 12 et 18.

> **REMARQUE** Pour une fonction f donnée, le **taux de variation** de f entre un nombre a et un nombre $a+h$ (h non nul) est égal à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

3 **a)** Tracer la droite (AB_1), puis calculer son coefficient directeur.

Pourquoi pouvait-on prévoir son signe ?

b) On note M le milieu de $[AB_1]$. Placer le point M dans le graphique. Quelles sont ses coordonnées ?

> **REMARQUE** Le coefficient directeur de la droite (AB_1) représente la vitesse moyenne de développement (en nombre de bactéries par heure) sur cette période de 24 heures.

c) En supposant que la population se soit réellement développée à la vitesse trouvée en question **2 a)** depuis la 12ᵉ heure, estimer sa valeur à la 24ᵉ heure.

En déduire l'erreur commise entre cette estimation et la mesure correspondante du tableau.

4 Reprendre la question **3** entre les points A et B_2, puis entre les points A et B_3.

5 Proposer une solution pour réduire au maximum l'erreur d'estimation de la vitesse de développement à la 12ᵉ heure.

6 **a)** Tracer la droite passant par A qui représenterait le mieux cette vitesse. Comment peut-on la caractériser ?

b) Estimer graphiquement son coefficient directeur.

La vitesse ainsi calculée est appelée **vitesse instantanée** à la 12ᵉ heure. Ce nombre est aussi appelé **nombre dérivé** de la fonction P en 12, noté $P'(12)$.

> **REMARQUE** Cette droite est appelée **tangente** à la courbe au point A.

> **REMARQUE** Pour une fonction f donnée, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a est appelé **nombre dérivé** de la fonction en a, noté $f'(a)$.

<u>Exercice 2 : (bonus)</u>

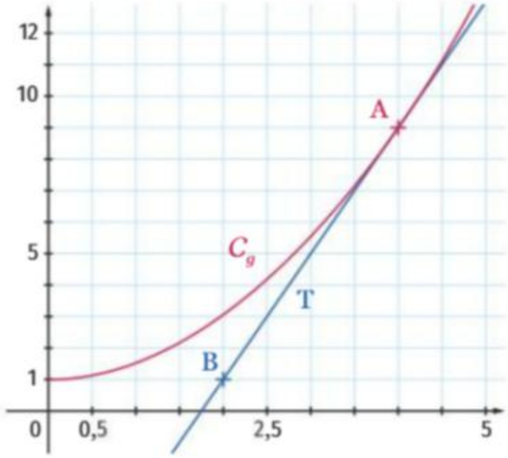
On supposera que les fonctions rencontrées dans cette activité sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A : Étude d'un cas particulier

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;5]$ par $g(x)=1+0{,}5x^2$ et la tangente T à sa courbe représentative C_g au point d'abscisse $a=4$.

On admet que T passe par le point $B(2\ ;1)$.

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé $g'(4)$.
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de T.



Partie B : Étude du cas général

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, a un réel de I et T la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a\ ;f(a))$.

1. Justifier que T admet une équation de la forme $y=f'(a)x+p$, où p est un nombre réel.
2. À l'aide des coordonnées de A, déterminer la valeur de p en fonction de a.
3. Prouver que T a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

AIDE 2 $A(x_A\ ;y_A)$ appartient à T si, et seulement si, $y_A=f'(a)x_A+p$.

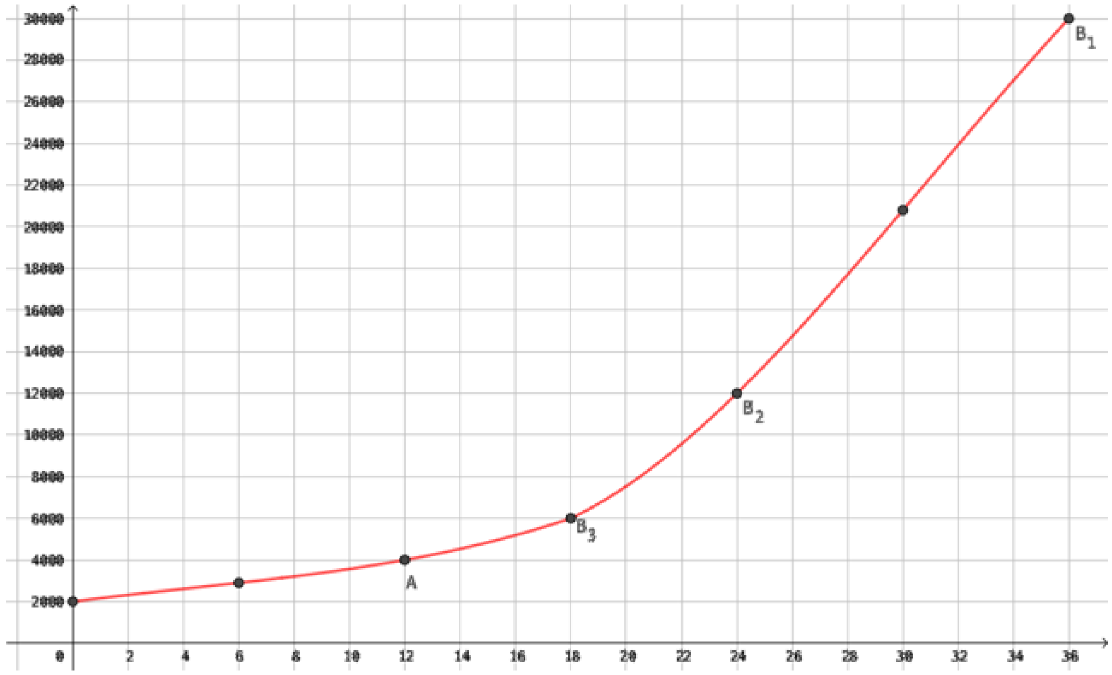
CORRECTION

Exercice 1 :

Questions :

Question préliminaire : Les points du graphique ne sont pas alignés donc la vitesse de développement n'est pas constante.

1.



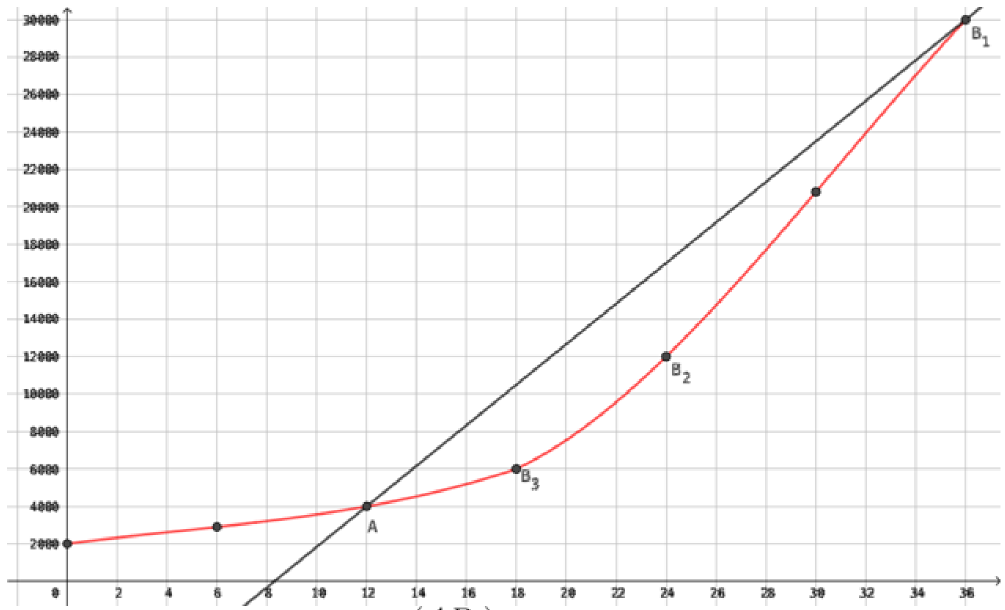
2.

a. Sur la période $[12; 36]$, la population a augmenté de 26 000 bactéries. Donc cela représente une vitesse de croissance moyenne estimée à $\frac{26000}{24} \approx 1083$ bactéries par heure.

b. Le taux de variation de P entre 12 et 24 vaut : $\frac{P(24)-P(12)}{24-12} \approx 667$.

Le taux de variation de P entre 12 et 18 vaut : $\frac{P(18)-P(12)}{18-12} \approx 333$.

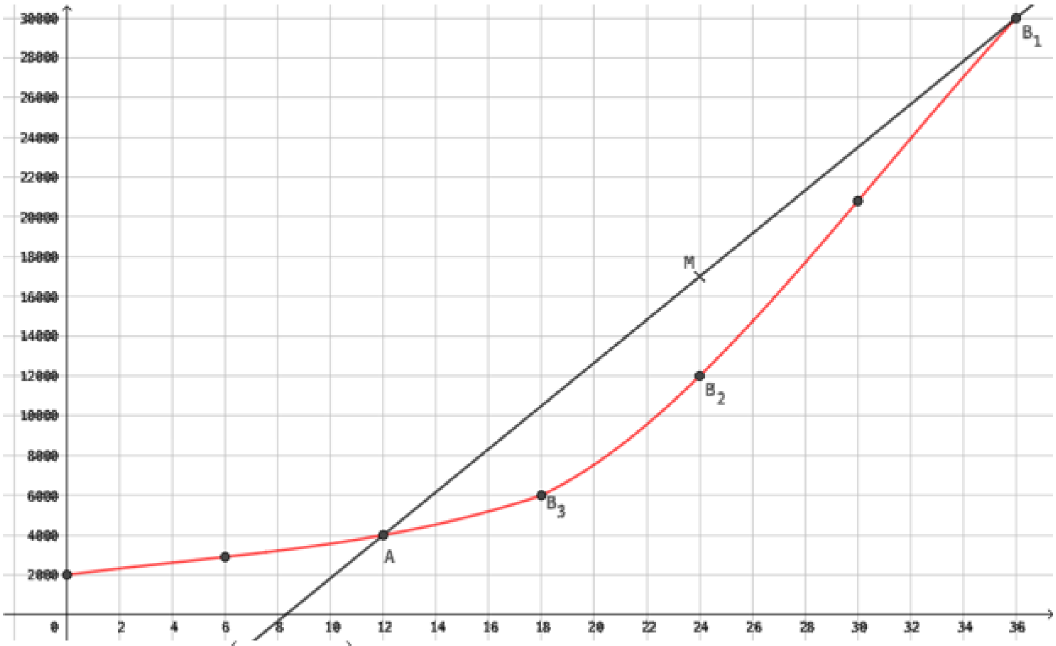
3.



a. Le coefficient directeur de la droite (AB_1) vaut :

$$\frac{y_{B_1}-y_A}{x_{B_1}-x_A} = \frac{30000-4000}{36-12} \approx 1083$$

Ce nombre est positif, ce qui était prévisible : la fonction affine associée à la droite (AB_1) est une fonction affine croissante.

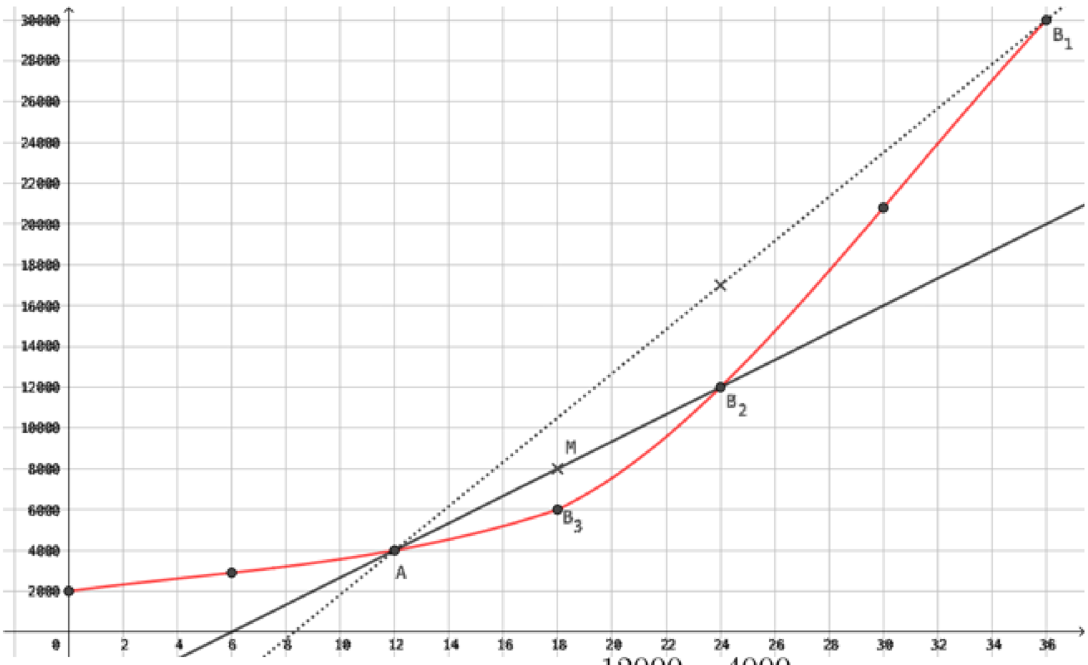


b.
Les coordonnées $(x_M ; y_M)$ de M sont données par :

$$x_M = \frac{x_A + x_{B_1}}{2} = 24 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_{B_1}}{2} = 17000.$$

c. La vitesse estimée en 3a) est de 1083 bactéries par heure. Donc en 12h (24 – 12 = 12) on a
1083 × 12 = 12 996 bactéries fabriquées. Donc on devrait avoir au bout de 24h,
4000 + 12996 = 16996 bactéries. Or on a 12000 bactéries soit une erreur de 16996 – 12000 = 4996.

4.

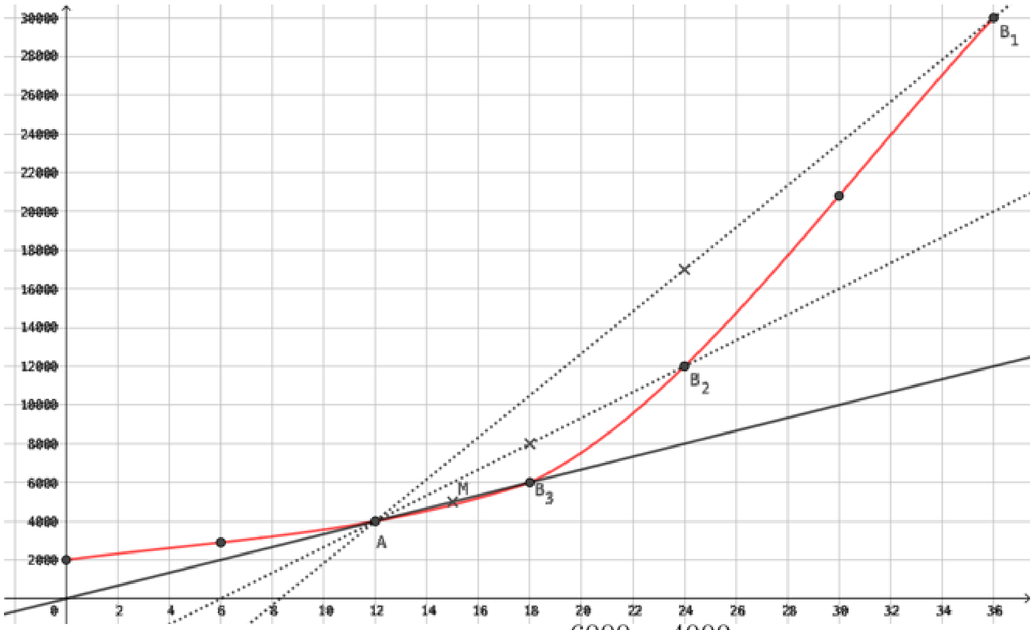


Le coefficient directeur de la droite (AB_2) vaut : $\dfrac{12000 - 4000}{24 - 12} \approx 667$.

On calcule maintenant les coordonnées du milieu de $[AB_2]$.

On a $x_M = \dfrac{12 + 14}{2} = 18$ et $y_M = \dfrac{4000 + 12000}{2} = 8000$.

La vitesse estimée est de 667 bactéries par heure. Donc en 6h (18 – 12 = 6) on a
667 × 6 = 4000 bactéries fabriquées. Donc on devrait avoir au bout de 18h,
4000 + 4000 = 8000 bactéries. Or on a 6000 bactéries soit une erreur de 8000 – 6000 = 2000.



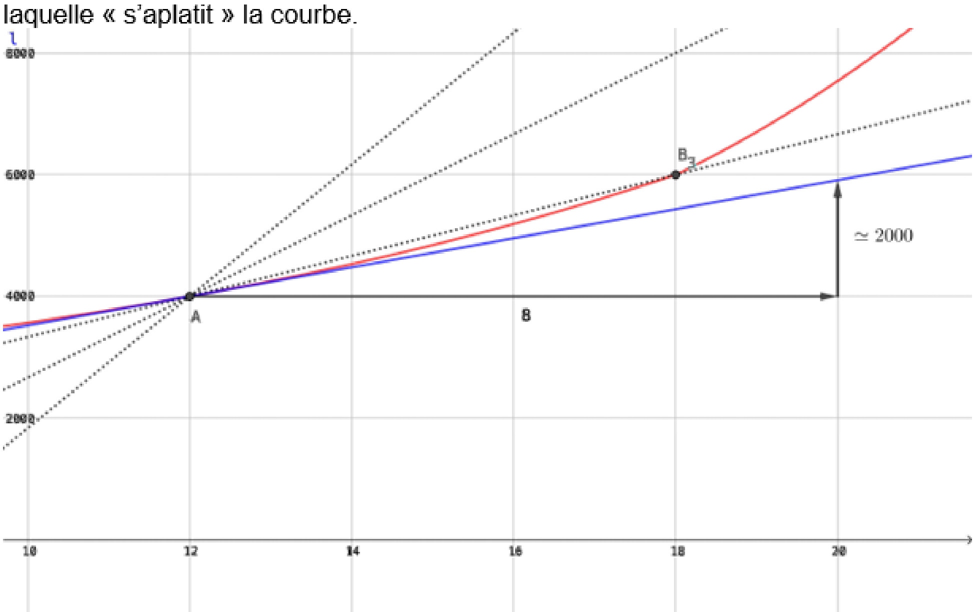
Le coefficient directeur de la droite (AB_3) vaut : $\dfrac{6000-4000}{18-12} \approx 333$.

On calcule maintenant les coordonnées du milieu de $[AB_2]$.

On a $x_M = \dfrac{18+12}{2} = 15$ et $y_M = \dfrac{4000+6000}{2} = 5000$.

La vitesse estimée est de 333 bactéries par heure. Donc en 3h (15 – 12 = 3) on a 333 × 3 = 999 bactéries fabriquées. Donc on devrait avoir au bout de 15h, 4000 + 999 = 4999 bactéries. Or on a 5000 bactéries soit une erreur de 5000 – 4999 = 1.

5. Pour minimiser l'écart, on peut prendre un point B le plus proche possible de A.
6.
   a. Plus on rapproche B du point A, plus les sécantes se rapprochent d'une droite sur laquelle « s'aplatit » la courbe.



   b. On estime graphiquement le coefficient directeur : environ $\dfrac{2000}{8} = 250$.

Bilan :

Au cours du temps, on peut mesurer une évolution à l'aide du taux de variation de f.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante à la courbe passant par les points d'abscisses a et $a+h$.
Pour mesurer une vitesse instantanée, on utilise le nombre dérivé $f'(a)$. Ce nombre correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, la tangente étant la position limite des sécantes. Dans l'exemple de cette activité $P'(12) = 250$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Graphiquement, $g'(4)$ est le coefficient directeur de T donc $g'(4) = \frac{8}{2} = 4$.

2. L'équation de la tangente en A s'écrit $y = g'(4)x + p = 4x + p$.
   Or $A \in T$ donc $y_A = 4x_A + p$, d'où $p = 9 - 16 = -7$.
   Donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en A est : $y = 4x - 7$.

Partie B

1. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en A donc T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.
2. $A \in T$, d'où $y_A = f'(a)x_A + p$. En notant $a = x_A$ et en observant que $y_A = f(a)$, cette équation peut se réécrire $p = f(a) - f'(a)a$.
3. L'équation réduite de la tangente en A est donc :
   $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Bilan :

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.