

## Utiliser un algorithme de dichotomie

1. Montrer que l'équation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .

2.  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

L'équation précédente s'écrit donc  $f(x) = 0$ .

L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-n}$  près, où  $n$  est un entier naturel.

Il s'agit d'un **algorithme de dichotomie**.

**Info :** Le mot « dichotomie » vient du grec *dichotomia* qui signifie « division » en deux parties.

L'algorithme de dichotomie consiste à répéter le partage en deux d'un intervalle à l'aide de son centre, puis à sélectionner celui des deux « demi-intervalles » dans lequel est localisée la solution  $\alpha$ .

Tant que  $b - a > 10^{-n}$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Si  $f(a) \times f(m) < 0$  alors

$$b = m$$

Sinon

$$a = m$$

Afficher  $m$

a. Exécuter cet algorithme pas à pas en complétant le tableau de valeurs suivant, lorsque  $a = -1$ ,  $b = 1$  et  $n = 1$  :

$a$	-1	0				
$b$	1	1				
$b - a > 10^{-1}$ ?	Vrai					
$m$	0					
$f(a) \times f(m) < 0$ ?	Faux					

b. Interpréter la valeur de la variable  $m$  à la fin de l'exécution de l'algorithme.

c. En Python : créer la fonction  $f(x)$  et la fonction `Dichotomie(a, b, n)` codant l'algorithme précédent et qui renvoie  $m$ .

d. Quelle valeur renvoie `Dichotomie(-1, 1, 4)` ?

3. Modifier la fonction  $f(x)$  et exécuter la fonction `Dichotomie` avec les bons paramètres pour obtenir une valeur approchée à  $10^{-6}$  près de l'unique solution de l'équation  $e^x - x - 2 = 0$  dans l'intervalle  $[0 ; 2]$ .

## DM Algorithme de dichotomie Corrigé

1) Posons  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . Etudions cette fonction sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$f'(x)$  est un trinôme de racines  $x = 1$  et  $x = -1$ .

$x$	-1	1
signes de $f'(x)$	0	0
	- signe de -a	
variations de $f$	3  -1	

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = 3 \quad \text{et} \quad f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1$$

Sur  $[-1 ; 1]$  la fonction  $f$  est définie, continue et strictement décroissante.

$$f(-1) = 3 ; f(1) = -1 \quad \text{et} \quad 0 \in [-1 ; 3]$$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .

2) a)

a	-1	0	0	0,25	0,25	0,3125
b	1	1	0,5	0,5	0,375	0,375
$b - a > 10^{-1}$	$1 + 1 = 2$ $2 > 0,1$ Vrai	$1 - 0 = 1$ $1 > 0,1$ Vrai	$0,5 - 0 = 0,5$ $0,5 > 0,1$ Vrai	$0,5 - 0,25 = 0,25$ $0,25 > 0,1$ Vrai	$0,375 - 0,25 = 0,125$ $0,125 > 0,1$ Vrai	$0,375 - 0,3125 = 0,0625$ $0,0625 > 0,1$ Faux
m	$\frac{-1+1}{2} = 0$	$\frac{1+0}{2} = 0,5$	$\frac{0+0,5}{2} = 0,25$	$\frac{0,25+0,5}{2} = 0,375$	$\frac{0,25+0,375}{2} = 0,3125$	STOP
$f(a) \times f(m) < 0$	$f(-1) \times f(0) = 3$ Faux	$f(0,5) \times f(0) = -0,375$ Vrai	$f(0) \times f(0,25) = 0,2656$ Faux	$f(0,25) \times f(0,375) \approx -0,019$ Vrai	$f(0,25) \times f(0,3125) \approx 0,025$ Faux	

b) La dernière valeur de m est  $m = 0,3125$ .

C'est la valeur qui permet d'obtenir un intervalle  $[a ; b]$  de largeur inférieure à  $10^{-1}$

on peut donc dire que la solution de l'équation  $f(x) = 0$  est comprise entre 0,3125 et 0,375 à  $10^{-1}$  près ou que la valeur approchée de la solution de  $f(x) = 0$  est 0,3125 à  $10^{-1}$  près.

```
File Edit View Settings Shell Run Tools Help
dm algo.py
1 def dichotomie(a,b,n):
2
3     while b-a > 10**(-n):
4         m = (a + b) / 2
5         if f(a) * f(m) < 0:
6             b = m
7         else:
8             a = m
9
10    return m
11
12    def f(x):
13        return x**3-3*x+1
14
15
Shells
Python 3.9.1 (tags/v3.9.1:1e5d33e, Dec 7 2020, 17:08:21) on Windows (64 bits).
This is the Pyzo interpreter with integrated event loop for ASYNCIO.
Type 'help' for help, type '?' for a list of *magic* commands.
>>> (executing file "dm algo.py")
>>> dichotomie(-1,1,4)
0.34735107421875
>>>
```

c)

3)

```
dm algo.py <tmp 1>
1 from math import*
2 def dichotomie(a,b,n):
3
4     while b-a > 10**(-n):
5         m = (a + b) / 2
6         if f(a) * f(m) < 0:
7             b = m
8         else:
9             a = m
10
11    return m
12
13    def f(x):
14        return exp(x)-x-2
Shells
Python 3.9.1 (tags/v3.9.1:1e5d33e, Dec 7 2020, 17:08:21) on Windows (64 bits).
This is the Pyzo interpreter with integrated event loop for ASYNCIO.
Type 'help' for help, type '?' for a list of *magic* commands.
>>> (executing file "<tmp 1>")
>>> dichotomie(0,2,6)
1.146193504333496
>>> |
```