LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connait le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de e^x		+	
variations de e^x	0	$\nearrow$ a	$\nearrow$ $+\infty$

Soit a un réel strictement positif.
On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $a \in \,]0 ; +\infty[$.
donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$.
Ce réel α sera appelé logarithme népérien de a.
Conclusion : **$e^x = a$ avec $a > 0$ $\Leftrightarrow x = \ln a$.**

Exemples : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1)$ Or $e^0 = 1$ donc **$\ln(1) = 0$**
$e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e)$ Or $e = e^1$ donc **$\ln(e) = 1$**

2) Conséquences algébriques :

$e^x = a$ avec $a > 0$ $\Leftrightarrow x = \ln a$ donc $e^{\ln a} = a$ et $x = \ln e^x$

On en déduit que :
$e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{6-3x} = 8$.

$e^{6-3x} = 8 \Leftrightarrow 6 - 3x = \ln 8 \Leftrightarrow -3x = \ln 8 - 6 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}(\ln 8 - 6)$

$S = \left\{-\frac{1}{3}(\ln 8 - 6)\right\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x+7} = -5$
$e^{2x+7} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc pas de solution $S = \varnothing$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$
Posons $X = e^x$ on a alors $X^2 - 3X + 1 > 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$ $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$e^{x_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $e^{x_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $x_2 = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $e^{2x} - 3e^x + 1$		+ signe de a	0	− signe de −a	0	+ signe de a	

Donc $S = \left]-\infty ; \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right[\cup \left]\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) ; +\infty\right[$

II. Etude de la fonction ln:

1) Définition de la fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \ln x$.

2) Dérivabilité et continuité de la fonction ln:

La fonction **ln est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**
Toute fonction dérivable étant continue, **la fonction ln sera continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**

De plus $x = e^{\ln x}$ pour $x > 0$ donc $(x)' = (e^{\ln x})'$ donc $1 = (\ln x)'\, e^{\ln x}$ donc $1 = (\ln x)' \times x$

donc **$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$** .

3) Sens de variation :

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $(\ln x)' > 0$

donc la fonction **ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$
variations de la fonction ln	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4) Limites de la fonction ln:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ (admise)

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (admise)

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

Démonstration : Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ donc $x = e^X$.
Quand x tend vers 0^+ , X tend vers $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0.$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour n entier naturel, $n > 0$

Démonstration : Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ donc $x = e^X$.
Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = -\lim\limits_{X \to +\infty} -X e^{-X} = 0.$

5) Signe de la fonction ln :

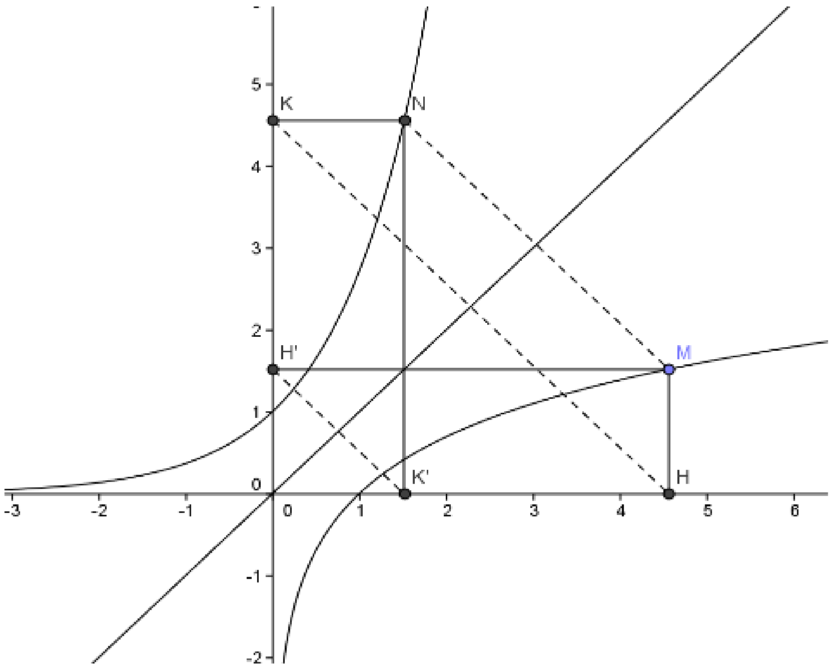
x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	↗ 0	
Signe de $\ln(x)$	‖ $-$	0	$+$

La fonction ln est strictement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et s'annule pour $x = 1$
donc

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\,]\,0\,;1\,[$
$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\,]\,1\,;+\infty\,[$

6) Conséquences graphiques :

a) Dans un repère orthonormal, la courbe de la fonction ln et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x (la première diagonale).



b) On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe de la fonction ln .

c) $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f''(x) < 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

donc f est concave sur $]\,0\,;+\infty\,[$. **La fonction logarithme népérien est concave sur] 0 ; + ∞ [.**

III. Relations fonctionnelles de la fonction ln:

Elles découlent des propriétés de la fonction exponentielle.

1) **Pour tout a > 0 et b > 0 ln (ab) = ln a + ln b.**

Posons A = ln (ab). $e^A = ab$. B = ln a + ln b$e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.
Donc $e^A = e^B$ donc A = B.

2) **Pour tout a > 0 $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.**

$\frac{1}{a}\times a = 1$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\times a\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln\frac{1}{a} + \ln a = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

3) **Pour tout a > 0 et b > 0 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

4) **Pour tout a> 0 et n entier relatif , ln (a^n) = n ln a .**

Si n = 2 $a^2 = a\times a$ donc $\ln(a^2) = \ln a + \ln a = 2\ln a$
Si n = 3 $a^3 = a^2 \times a$ donc $\ln(a^3) = \ln a^2 + \ln a = 2\ln a + \ln a = 3\ln a$ …
Pour $n \in \mathbb{N}$, on fait une récurrence : $(P_n) : \ln(a^n) = n\ln(a)$
$n = 0$ $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$ donc (P_0) est vraie.
On suppose que la propriété est vraie pour un certain naturel k et on démontre au rang k + 1.
$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k\ln(a) + \ln(a) = (k+1)\ln(a)$
(P_0) est vraie, (P_n) est héréditaire donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Si n est un entier négatif , alors $-n \in \mathbb{N}$. Donc $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$
Or $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n)$ donc $-\ln(a^n) = -n\ln(a)$.
donc pour n entier négatif on a $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
Conclusion : **Pour tout a> 0 et n entier relatif , ln (a^n) = n ln a .**

5) **Pour tout a> 0 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$**

$(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$ donc $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

IV. Etude de la fonction ln(u(*x*)):

1) Ensemble de définition:

ln (u(*x*)) n'existe que si u(*x*) > 0 donc
Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction ln (u(*x*))
il faut résoudre l'inéquation u(*x*) > 0.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble de définition de la fonctionln (u(*x*)).

Exemple : Donner l'ensemble de définition de la fonction *f* définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

$3 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{5}$ donc $D_f = \left]-\infty ; \frac{3}{5}\right[$.

2) Dérivée de la fonction ln(u(*x*)) :

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I alors la fonction ln(u(*x*)) est dérivable sur I et on a : $[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple : Etudier sur $\left]-\infty ; \frac{3}{5}\right[$ la fonction *f* définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

Calcul de la dérivée : Posons $u(x) = 3 - 5x$ et $u'(x) = -5$ alors $f'(x) = \dfrac{-5}{3 - 5x}$.

Signe de *f* ' (*x*) : Sur $\left]-\infty ; \frac{3}{5}\right[$ $3 - 5x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de -5 donc négative.

Remarque : **La fonction $x \longrightarrow \ln(u(x))$ a les mêmes variations que la fonction u.**

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$
Signe de $f'(x)$	$-$	||
Variations de f	$+\infty$ ↘ $-\infty$	||

Limites :

Posons $X = 3 - 5x$. Quand x tend vers $-\infty$, $3 - 5x$ tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(3 - 2x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

Quand x tend vers $\frac{3}{5}$, $x < \frac{3}{5}$, $3 - 5x$ tend vers 0^+ .

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{5}} \ln(3 - 5x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$.

3) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction ln:

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ on a :

Si $x > 0$ et si $y > 0$

$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$

Exemples :

1) Résoudre $\ln(2x - 3) = \ln(5 - x)$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

Il faut donc chercher les x tels que $2x - 3 > 0$ **et** $5 - x > 0$.

$2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ et $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$ donc $\mathbf{D =]\frac{3}{2} ; 5[}$.

On résout ensuite l'équation de départ :

$\ln(2x - 3) = \ln(5 - x) \Leftrightarrow 2x - 3 = 5 - x \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

Il faut ensuite vérifier que la solution est dans l'ensemble de définition

$\frac{8}{3} \approx 2{,}7$ donc $\frac{8}{3} \in]\frac{3}{2} ; 5[$ donc $\frac{8}{3}$ est la solution. $\mathbf{S = \{\frac{8}{3}\}}$

2) Résoudre $\ln(\frac{1}{3}x - 5) \leq 2$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation :

Il faut donc chercher les x tels que $\frac{1}{3}x - 5 > 0$.

$\frac{1}{3}x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 15$ donc $\mathbf{D =]15 ; +\infty[}$.

On résout ensuite l'inéquation de départ :

$\ln(\frac{1}{3}x - 5) \leq 2 \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{3}x - 5) \leq \ln(e^2) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - 5 \leq e^2 \Leftrightarrow x \leq 3(e^2 + 5) \Leftrightarrow x \leq 3e^2 + 15$.

Il faut ensuite prendre uniquement les solutions qui sont dans l'ensemble de définition

$3e^2 + 15 \approx 37$ donc l'ensemble des solutions est $\mathbf{S =]15 ; 3e^2 + 15]}$.

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $0{,}5^n \leq 0{,}003$

$0{,}5^n \leq 0{,}003 \Leftrightarrow \ln(0{,}5^n) \leq \ln(0{,}003)$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\Leftrightarrow n \ln(0{,}5) \leq \ln(0{,}003)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}003)}{\ln(0{,}5)}$ car $\ln(0{,}5)$ est un nombre négatif.

$\Leftrightarrow n \geq 8{,}38$

Les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 9.