

## I. Primitives d'une fonction

### 1) Equation différentielle

La description de nombreux phénomènes physiques peut être modélisée par une relation entre une fonction  $g$  et sa dérivée  $g'$  : rechercher une fonction  $g$  revient à résoudre une équation différentielle.

Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On dit que la fonction  $g$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f$  sur  $I$  si et seulement si  $g$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $g'(x) = f(x)$

*Exemple :* Soit l'équation différentielle  $y' = 3x^2$ , pour  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $g$  telle que  $g(x) = x^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 3x^2$   
Donc  $g$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $y' = 3x^2$ .

### 2) Définitions et propriétés

a) Primitive d'une fonction  $f$  :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Dire que  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  signifie que  $F$  est dérivable sur  $I$  et que  $F' = f$  sur  $I$ .

b) Propriétés :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

- Les fonctions  $G$  définies sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$  constituent l'ensemble de toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ .
- Parmi toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ , il en existe une seule telle que  $G(x_0) = y_0$  avec  $x_0$  un réel donné de l'intervalle  $I$  et  $y_0$  un réel donné.

Démonstration :

Si  $G(x) = F(x) + c$  pour  $x \in I$  alors  $G'(x) = F'(x) = f(x)$  donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Réciproquement, si  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G'(x) = f(x)$ .

Or  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  donc  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ .

Donc pour tout  $x$  de  $I$ ,  $(G - F)'(x) = 0$  donc la fonction  $G - F$  est une fonction constante sur  $I$ .

Il existe donc un réel  $c$  tel que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) - F(x) = c$  donc  $G(x) = F(x) + c$ .

$G(x_0) = y_0$  peut s'écrire  $F(x_0) + c = y_0$  donc  $c = y_0 - F(x_0)$ . On a donc  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ .

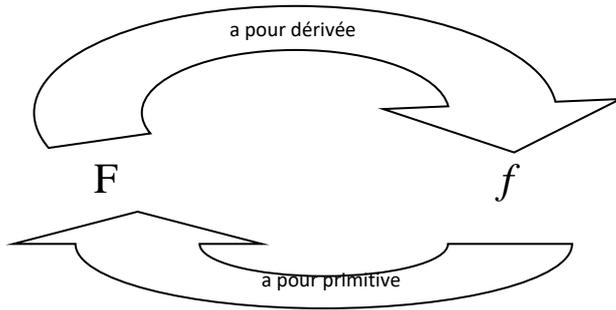
Le nombre  $y_0 - F(x_0)$  étant fixé, la fonction  $G$  est alors unique.

- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

## II .Recherche des primitives d'une fonction :

### 1) Fonctions usuelles :

Ce tableau s'obtient par lecture inverse du tableau des dérivées.



Fonction $f$	Intervalle de définition	Primitive $F$
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$   $]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x + C, C \in \mathbb{R}$

## 2) Primitive de la somme de deux fonctions :

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , si  $G$  est une primitive de  $g$  alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$ .

Exemple : Soit  $h$  la fonction définies sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 + 2x$ . Déterminer les primitives  $H$  de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x$$

$$H(x) = F(x) + G(x) \text{ avec } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } G(x) = x^2 + C_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

## 3) Primitive du produit d'une fonction par un réel :

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $kF$  est une primitive de  $kf$  sur  $I$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Exemple : Trouver les primitives de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 9x^5$ .

$$g(x) = 9 \times f(x) \text{ avec } f(x) = x^5 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$G(x) = 9 \times F(x) = 9 \times \left(\frac{1}{6}x^6 + C_1\right) = \frac{3}{2}x^6 + C, C \in \mathbb{R}.$$

## 4) Primitive d'un produit de la forme $u' \times u^n$ avec $u$ une fonction dérivable non nulle et $n \in \mathbb{Z}$ :

➤ Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , si  $n$  est un nombre naturel,

alors les primitives de  $u' \times u^n$  sont données par  $\frac{1}{n+1} \times u^{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$ .

➤ Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , si  $n$  est un nombre naturel,  $n \neq 1$ ,

alors les primitives de  $\frac{u'}{u^n}$  sont données par  $\frac{-1}{(n-1) \times u^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$ .

En particulier, si  $n = 2$ , les primitives de  $\frac{u'}{u^2}$  sont  $-\frac{1}{u} + C, C \in \mathbb{R}$ .

Exemples :

a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$ . Trouver les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On remarque que  $f$  se présente comme un produit de deux fonctions.

Posons  $u(x) = x^2 + 1$  alors  $u'(x) = 2x$ . On a alors  $f(x) = u'(x) \times u^2(x)$ .

Donc  $F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + C, C \in \mathbb{R}$ .  $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C, C \in \mathbb{R}$ .

b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{6x^2}{(2x^3 - 4)^5}$ . Trouver les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On remarque que  $f$  se présente comme un quotient de deux fonctions.

Posons  $u(x) = 2x^3 - 4$  alors  $u'(x) = 6x^2$ . On a alors  $f(x) = \frac{u'(x)}{u^5(x)}$ .

Donc  $F(x) = \frac{-1}{4u^4(x)} + C, C \in \mathbb{R}$ .  $F(x) = \frac{-1}{4(2x^3 - 4)^4} + C, C \in \mathbb{R}$ .

c) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \cos x \times (\sin x)^7$ . Trouver les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

On remarque que  $f$  se présente comme un produit de deux fonctions.

Posons  $u(x) = \sin x$  alors  $u'(x) = \cos x$ . On a alors  $f(x) = u'(x) \times u^7(x)$ .

Donc  $F(x) = \frac{1}{8} u^8(x) + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .  $F(x) = \frac{1}{8} (\sin x)^8 + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .

d) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^4}$ . Trouver les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

On remarque que  $f$  se présente comme un quotient de deux fonctions.

Posons  $u(x) = \cos x$  alors  $u'(x) = -\sin x$ . On a alors  $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^4(x)}$ .

Donc  $F(x) = -\frac{-1}{3 u^3(x)} + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .  $F(x) = \frac{1}{3 (\cos x)^3} + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .

### **5) Tableau récapitulatif :**

On suppose que  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $u$  sont des fonctions définies et dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ .

<b>Fonction <math>f</math></b>	<b>Primitive <math>F</math></b>
$f(x) = a \times g(x) + b \times h(x)$ avec $a, b$ réels	$F(x) = a \times G(x) + b \times H(x) + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = u'(x) \times u^n(x)$ avec $n \in \mathbf{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u^n(x)}$ avec $u(x) \neq 0$ et $n$ entier, $n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) u^{n-1}(x)} + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$	$F(x) = \ln( u(x) ) + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) > 0$	$F(x) = 2 \sqrt{u(x)} + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = u'(x) \times \sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + C$ , $C \in \mathbf{R}$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + C$ , $C \in \mathbf{R}$

## 6) Les méthodes pour rechercher une primitive :

- 1) *Si  $n \in \mathbb{N}$ , pour obtenir une primitive de  $f(x) = x^n$ , on augmente l'exposant de 1 et on divise par  $(n + 1)$ .*

Déterminer les primitives sur  $\mathbb{R}$  de  $f(x) = x^8$  puis déterminer la primitive de  $f$  telle que  $F(1) = 3$ .

$$F(x) = \frac{1}{9}x^9 + C, C \in \mathbb{R}.$$

*Pour déterminer une primitive particulière, il faut calculer la valeur de la constante.*

$$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \times 1^9 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9}$$

$$\text{La primitive cherchée est donc } F(x) = \frac{1}{9}x^9 + \frac{26}{9}.$$

- 2) *Pour un produit d'une fonction par un réel, on obtient une primitive en multipliant par le réel une primitive de la fonction.*

Déterminer les primitives de  $f(x) = 4x^5$  et  $g(x) = -12x^7$ .

$$F(x) = 4 \times \frac{1}{6}x^6 + C = \frac{2}{3}x^6 + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$G(x) = -12 \times \frac{1}{8}x^8 + C = -\frac{3}{2}x^8 + C, C \in \mathbb{R}$$

- 3) *Pour une somme de fonctions, on obtient une primitive en ajoutant des primitives de chacune des fonctions.*

Déterminer les primitives de  $h(x) = 4x^5 - 12x + 3$

$$H(x) = \frac{2}{3}x^6 - 12 \times \frac{1}{2}x^2 + 3x + C = \frac{2}{3}x^6 - 6x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}.$$

- 4) *Si  $f(x) = \frac{a}{x^2}$ , on peut écrire  $f(x) = a \times \frac{1}{x^2}$ . Les primitives sont alors  $F(x) = a \times (-\frac{1}{x}) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .*

Déterminer les primitives de  $h(x) = 2x^2 - \frac{3}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$  puis déterminer la primitive  $H$  de  $h$  telle que  $H(1) = 0$ .

$$H(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 3 \times (-\frac{1}{x}) + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$H(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}.$$

$$\text{La primitive de } h \text{ qui s'annule pour } x = 1 \text{ est } H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{x} - \frac{11}{3}.$$

5) Si  $f(x) = \frac{u'}{u^2}$  alors  $F(x) = -\frac{1}{u} + C, C \in \mathbb{R}$

Déterminer les primitives de  $h(x) = \frac{8}{(4x-3)^2}$  sur  $[1; +\infty[$ .

Posons  $u(x) = 4x - 3$  alors  $u'(x) = 4$  et  $h(x) = 2 \times \frac{4}{(4x-3)^2} = 2 \times \frac{u'}{u^2}$

$H(x) = 2 \times \frac{-1}{u} + C = 2 \times \frac{-1}{4x-3} + C = \frac{-2}{4x-3} + C, C \in \mathbb{R}.$

6) Lorsque l'on cherche les primitives d'un produit, on peut chercher à faire apparaître la forme  $u' \times u^n$

On a alors  $F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Déterminer les primitives de  $f(x) = -8x(x^2-5)^4$  sur  $\mathbb{R}$  puis celle qui s'annule pour  $x = -2$ .

$f$  s'écrit sous la forme d'un produit. Posons  $u(x) = x^2 - 5$  alors  $u'(x) = 2x$ .

$f(x) = -4 \times u'(x) \times u^4(x)$ . Donc  $F(x) = -4 \times \frac{1}{5} \times u^5(x) + C = -\frac{4}{5}(x^2-5)^5 + C, C \in \mathbb{R}.$

$$F(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}(-1)^5 + C = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{5}$$

La primitive de  $f$  s'annulant pour  $x = -2$  est  $F(x) = -\frac{4}{5}(x^2-5)^5 - \frac{4}{5}$

7) Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant une racine carrée, on peut chercher

à faire apparaître la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ . Les primitives sont alors de la forme  $2\sqrt{u} + C$ .

Déterminer les primitives de  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $u(x) = x^2 + 4$  alors  $u'(x) = 2x$  et  $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} + C = \sqrt{x^2+4} + C.$

8) Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant des exponentielles, on peut chercher à faire apparaître la forme  $u' e^u$ . Les primitives sont alors de la forme  $e^u$ .

Déterminer les primitives de  $f(x) = \frac{1}{4} x e^{7x^2-3}$

Posons  $u(x) = 7x^2 - 3$  alors  $u'(x) = 14x$  et  $f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} \times 14x \times e^{7x^2-3} = \frac{1}{56} \times u'(x) \times e^{u(x)}$

Donc  $F(x) = \frac{1}{56} \times e^{7x^2-3} + C.$

9) Si  $f(x) = \frac{u'}{u}$  alors  $F(x) = \ln |u(x)| + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Déterminer les primitives de  $h(x) = \frac{8x}{3x^2 + 7}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $u(x) = 3x^2 + 7$   $u(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $u'(x) = 6x$  donc  $h(x) = 8 \times \frac{1}{6} \times \frac{6x}{3x^2 + 7} = \frac{4}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc  $H(x) = \frac{4}{3} \ln |u(x)| + C$  donc  $H(x) = \frac{4}{3} \ln (3x^2 + 7) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

10) Si  $f(x) = \frac{u'}{u^n}$  alors  $F(x) = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

Déterminer les primitives de  $h(x) = \frac{8}{(5x-2)^7}$  sur  $]1; +\infty[$ .

$H(x) = \frac{8}{5} \times \frac{-1}{6(5x-2)^6} + C = \frac{-8}{30(5x-2)^6} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

### III. Les équations différentielles :

#### 1) Equation différentielle du type $y' = f$ :

**$f$  est une fonction définie et continue sur  $I$ .**

**$F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .**

**Alors  $F$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f$  dont l'inconnue est la fonction  $y$ .**

Exemple : Résoudre  $y' = -\frac{2}{x^2} + x - 1$  sur  $]0; +\infty[$

Posons  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{2}{x^2} + x - 1$

$F(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{2} - x + C = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\frac{2}{x^2} + x - 1$  sur  $]0; +\infty[$

sont les fonctions  $F$  définies par  $F(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

## 2) Equation différentielle du type $y' = a y$ :

### Propriété :

Soit  $a$  un réel.

L'équation  $y' = ay$  ou  $y' - ay = 0$  est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, homogène ( sans second membre ) à coefficients constants.

L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = ay$  est l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{ax}$ , où  $C$  est une constante réelle quelconque.

### Démonstration

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = C e^{ax}$ , où  $C$  est un réel.

Alors  $f'(x) = C \times a e^{ax} = a \times f(x)$ .

Puisque  $f'(x) = a \times f(x)$  pour tout réel  $x$ ,  $f$  est bien solution de l'équation différentielle  $y' = ay$ .

Réciproquement, soit  $f$  une solution de l'équation différentielle (E) :  $y' = ay$

et soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = -a e^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} f'(x)$

Puisque  $f$  est solution de (E),  $f'(x) = a \times f(x)$

et pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = -a e^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} f'(x) = -a e^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} a \times f(x) = 0$ .

La fonction  $g$  est donc constante, soit  $e^{-ax} \times f(x) = C$

Puisque  $e^{-ax}$  est différent de 0 pour tout réel  $x$ , on obtient :  $f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$

### Remarques :

➤ Pour tout réels  $x_0$  et  $y_0$ , l'équation différentielle  $y' = ay$  a une unique solution vérifiant  $f(x_0) = y_0$ .

Il suffit de déterminer la valeur de la constante  $C$ .

➤ Si  $f_1$  et  $f_2$  sont solutions de  $y' = ay$  alors  $f_1 + f_2$  et  $k f_1$  avec  $k \in \mathbb{R}$  sont aussi solutions de  $y' = ay$ .

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = a f_1 + a f_2 = a (f_1 + f_2) \text{ donc } f_1 + f_2 \text{ est bien solution de } y' = ay$$

$$(k f_1)' = k f_1' = k a f_1 = a k f_1 \text{ donc } k f_1 \text{ est bien solution de } y' = ay.$$

## 3) Equations différentielles du type $y' = ay + b$ :

### Propriété :

Soit  $a$  et  $b$  des réels,  $a$  non nul.

L'équation différentielle  $y' = ay + b$  ou  $y' - ay = b$  est appelée équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre ( $b$ ) et à coefficients constants.

L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E)  $y' = ay + b$  est l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$  avec  $C$  une constante réelle.

### Exemple :

L'équation différentielle  $y' = 2y + 6$  admet pour solution la fonction  $f$  telle que

$$f(x) = Ce^{2x} - \frac{6}{2} = Ce^{2x} - 3, \text{ où } C \text{ est une constante.}$$

### Remarque :

Les solutions de  $y' = ay + b$  s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante  $\varphi$  de  $y' = ay + b$  aux solutions de l'équation homogène associée  $y' = ay$ .

$$\varphi(x) = -\frac{b}{a}. \text{ En effet } \varphi'(x) = 0 \text{ et } a \varphi(x) + b = a \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = \varphi'(x)$$

donc  $\varphi(x) = -\frac{b}{a}$  est bien une solution particulière constante de  $y' = ay + b$ .

#### 4) Equations différentielles du type $y' = ay + g$ :

##### Propriété :

Soit  $a$  un réel et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Toute solution dans  $I$  de l'équation différentielle (E)  $y' = ay + g$  est la somme des solutions de  $y' = ay$  (équation homogène associée) et d'une solution particulière  $\varphi$  de l'équation (E).

##### Exemples :

1) Résoudre  $y' = 2y + e^x$

L'équation différentielle  $y' = 2y + e^x$  admet pour solution particulière la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = -e^x$  puisque  $\varphi'(x) = -e^x$  et  $2\varphi(x) + e^x = -e^x = \varphi'(x)$ .

De plus les solutions de  $y' = 2y$  sont de la forme  $x \rightarrow Ce^{2x}$

Donc les solutions de  $y' = 2y + e^x$  sont les fonctions  $f$  définies par  $f(x) = Ce^{2x} - e^x$ , où  $C$  est une constante réelle.

2) Résoudre  $y' + 2y = 4x - 3$  (E)

a) Montrer que (E) admet une fonction affine comme solution particulière puis en déduire la solution générale de (E).

Posons  $\varphi(x) = mx + p$ .  $\varphi'(x) = m$ .

$\varphi$  solution de (E)  $\Leftrightarrow m + 2(mx + p) = 4x - 3$

$$\Leftrightarrow 2mx + m + 2p = 4x - 3$$

Donc, par identification, on a  $2m = 4 \Leftrightarrow m = 2$  et  $m + 2p = -3 \Leftrightarrow 2p = -5 \Leftrightarrow p = -\frac{5}{2}$

Donc  $\varphi(x) = 2x - \frac{5}{2}$  est une solution particulière affine de (E).

Les solutions de  $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$  sont de la forme  $x \rightarrow Ce^{-2x}$ .

Donc les solutions générales de (E) sont les fonctions  $f$  définies par  $f(x) = Ce^{-2x} + 2x - \frac{5}{2}$

b) Déterminer la solution de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point  $A(1 ; 0)$ .

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow Ce^{-2} + 2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}e^2$$

donc la solution cherchée est  $f(x) = \frac{1}{2}e^2 e^{-2x} + 2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}e^{2-2x} + 2x - \frac{5}{2}$