Chapitre 11 **Primitives- Equations différentielles**

I.Primitives d'une fonction :

1) Equation différentielle:

La description de nombreux phénomènes physiques peut être modélisée par une relation entre une fonction g et sa dérivée g'.Ce type d'équation est une équation différentielle.
Recherchant une fonction g qui vérifie cette équation revient à résoudre une équation différentielle.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ .
On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle y' = f sur I
si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $g'(x) = f(x)$.

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' = 3x^2$, pour $x \in \mathbb{R}$.
La fonction g telle que $g(x) = x^3$ est dérivable sur ℝ et, pour tout réel x , $g'(x)= 3x^2$
Donc g est une solution sur ℝ de l'équation $y' = 3x^2$.

2) Définitions et propriétés :

a) Primitive d'une fonction f :

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ .
Dire que **F est une primitive de f sur l'intervalle I** signifie que F est dérivable sur I et que …………………..….….. sur I.

b) Propriétés :

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ et F est une primitive de f sur I.

- Les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ constituent l'ensemble de toutes les primitives de f sur I.
- Parmi toutes les primitives de f sur I, il en existe une seule telle que $G(x_0) = y_0$ avec x_0 un réel donné de l'intervalle I et y_0 un réel donné.

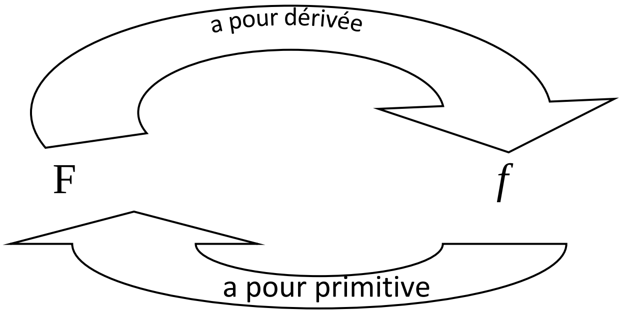
Démonstration :

- Toute fonction continue sur un intervalle I de ℝ admet des primitives sur ℝ.

II .Recherche des primitives d'une fonction

1)Fonctions usuelles :

Ce tableau s'obtient par lecture inverse du tableau des dérivées.



Fonction f	**Intervalle de définition**	**Primitive F**
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}\ , n > 1$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$	
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ n > 1$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$[\, 0 \,;\, +\infty \,[$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]\, 0 \,;\, +\infty \,[$	
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathrm{IR} \setminus \{ 0 \}$ | $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$	

2) Primitive de la somme de deux fonctions :

Si F est une primitive de f, si G est une primitive de g alors …………….. est une primitive de $f + g$.

Exemple : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 2x$. Déterminer les primitives H de h sur $\mathbb{R}$.

3) Primitive du produit d'une fonction par un réel :

Si F est une primitive de f sur I alors ……………..….. est une primitive de $k \times f$ sur I avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : Trouver les primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^5$.

4) Primitive d'un produit de la forme $u' \times u^n$ avec u une fonction dérivable non nulle et $n \in \mathbb{Z}$:

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, si n est un entier naturel,

  alors les primitives de $\mathbf{u' \times u^n}$ sont données par ………………………… **, $C \in \mathbb{R}$.**

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, si n est un entier naturel, **$n \neq 1$,**

  alors les primitives de $\dfrac{u'}{u^n}$ sont données par **……………………….. , $C \in \mathbb{R}$.**

  En particulier, si n = 2, les primitives de $\dfrac{u'}{u^2}$ sont**…………………….., $C \in \mathbb{R}$.**

Exemples :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x^2}{(2x^3 - 4)^5}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \times (\sin x)^7$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^4}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

5) Tableau récapitulatif :

On suppose que f , g , h et u sont des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction f	**Primitive F**
$f(x) = a \times g(x) + b \times h(x)$ avec a,b réels	
$f(x) = u'(x) \times u^n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$	
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$ avec $u(x) \neq 0$ et n entier , $n \geq 2$	
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$	
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) > 0$	
$f(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$	
$f(x) = u'(x) \times \sin(u(x))$	
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	

6) Les méthodes pour rechercher une primitive :

1) *Si $n \in \mathbb{N}$, pour obtenir une primitive de $f(x) = x^n$, on augmente l'exposant de 1 et on divise par (n + 1).*

Déterminer les primitives F, sur $\mathbb{R}$, de $f(x) = x^8$ puis déterminer la primitive de f telle que F(1) =3.

Pour déterminer une primitive particulière , il faut calculer la valeur de la constante .

2) *Pour un produit d'une fonction par un réel , on obtient une primitive en multipliant par le réel une primitive de la fonction .*

Déterminer les primitives de $f(x) = 4x^5$ et $g(x) = -12x^7$.

3) *Pour une somme de fonctions , on obtient une primitive en ajoutant des primitives de chacune des fonctions.*

Déterminer les primitives de $h(x) = 4x^5 - 12x + 3$

4) *Si* $f(x) = \frac{a}{x^2}$ *, on peut écrire* $f(x) = a \times \frac{1}{x^2}$ *. Les primitives sont alors* $F(x) =$ *……………………… , $C \in \mathbb{R}$.*

Déterminer les primitives de $h(x) = 2x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis déterminer la primitive H de h telle que $H(1) = 0$.

5) *Si* $f(x) = \frac{u'}{u^2}$ *alors* $F(x)=$*……………………………., $C \in \mathbb{R}$*

Déterminer les primitives de $h(x) = \frac{8}{(4x-3)^2}$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

6) *Lorsque l'on cherche les primitives d'un produit , on peut chercher à faire apparaître la forme* $u' \times u^n$

Déterminer les primitives de $f(x) = -8x\,(x^2-5)^4$ sur $\mathbb{R}$ puis celle qui s'annule pour $x = -2$.

7) *Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant une racine carrée, on peut chercher à faire apparaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Les primitives sont alors de la forme …………………… + , $C \in \mathbb{R}$.*

Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ sur $\mathbb{R}$.

8) *Lorsque l'on cherche les primitives d'une fonction contenant des exponentielles , on peut chercher à faire apparaître la forme $u'\,e^u$. Les primitives sont alors de la forme ……………….. + C , $C \in \mathbb{R}$.*

Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{4}x\,e^{7x^2 - 3}$

9) *Si $f(x) = \frac{u'}{u}$ alors $F(x)$=………………………….., $C \in \mathbb{R}$*

Déterminer les primitives de $h(x) = \frac{8x}{3x^2 + 7}$ sur $\mathbb{R}$.

III. Les équations différentielles :

1) Equation différentielle du type y' = f :

f est une fonction définie et continue sur I.
F est une primitive de f sur I.
Alors F est une solution de l' équation différentielle y' = f dont l'inconnue est la fonction y.

Exemple : Résoudre $y' = -\dfrac{2}{x^2} + x - 1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Posons f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x^2} + x - 1$

$F(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2}{2} - x + C = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2} - x + C$, $C \in \mathbb{R}$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{2}{x^2} + x - 1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

sont les fonctions F définies par $F(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2} - x + C$, $C \in \mathbb{R}$

2) Equation différentielle du type y' = a y :

Propriété :
Soit a un réel.
L'équation y' = ay ou y' – ay = 0 est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, homogène (sans second membre) à coefficients constants.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle y' = ay est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration

Remarques :

- Pour tout réels x_0 et y_0, l'équation différentielle y' = ay a une unique solution vérifiant $f(x_0) = y_0$.

  Il suffit de déterminer la valeur de la constante C.

- Si f_1 et f_2 sont solutions de y' = ay alors $f_1 + f_2$ et $k\,f_1$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont aussi solutions de y' = ay.

  $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = a\,f_1 + a\,f_2 = a\,(f_1 + f_2)$ donc $f_1 + f_2$ est bien solution de y' = ay

  $(k\,f_1)' = k\,f_1' = k\,a\,f_1 = a\,k\,f_1$ donc $k\,f_1$ est bien solution de y' = ay.

3)Equations différentielles du type $y' = ay + b$:

Propriété :

Soit a et b des réels, a non nul.
L'équation différentielle $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ est appelée équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre (b) et à coefficients constants.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec C une constante réelle.

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 2y + 6$ admet pour solution la fonction f telle que
$f(x) = Ce^{2x} - \frac{6}{2} = Ce^{2x} - 3$, où C est une constante.

Remarque :

Les solutions de $y' = ay + b$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante φ de $y' = ay + b$ aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$.

$\varphi(x) = -\frac{b}{a}$. En effet $\varphi'(x) = 0$ et $a\,\varphi(x) + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = \varphi'(x)$

donc $\varphi(x) = -\frac{b}{a}$ est bien une solution particulière constante de $y' = ay + b$.

4)Equations différentielles du type $y' = ay + g$:

Propriété :

Soit a un réel et g une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) $y' = ay + g$ est la somme des solutions de $y' = ay$ (équation homogène associée) et d'une solution particulière φ de l'équation (E).

Exemples :

1) Résoudre $y' = 2y + e^x$

2) Résoudre $y' + 2y = 4x - 3$ (E)

a) Montrer que (E) admet une fonction affine comme solution particulière puis en déduire la solution générale de (E).

b) Déterminer la solution de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point A(1 ; 0).