

## I. Introduction

### Modélisations et fonctions

Les suites numériques permettent de modéliser des phénomènes discrets, comme par exemple l'évolution d'un bénéfice d'une année sur l'autre ou encore les mensualités d'un crédit.

Alors que les fonctions numériques permettent de modéliser les phénomènes continus, comme par exemple l'évolution du débit d'une rivière lors d'une crue.

Citer deux autres phénomènes continus que l'on peut étudier à l'aide d'une fonction :

## II. Quelques rappels sur les fonctions

### 1) Définitions et vocabulaire.

Définir une fonction  $f$  sur un intervalle  $D$  inclus dans  $\mathbb{R}$ , c'est associer à tout réel  $x$  de  $D$  un seul réel  $y$ .  
On note  $f: x \rightarrow y$  ou bien  $y = f(x)$ .

On dit que  $y$  est ..... de  $x$  par  $f$  et que  $x$  est un ..... de  $y$  par  $f$ .

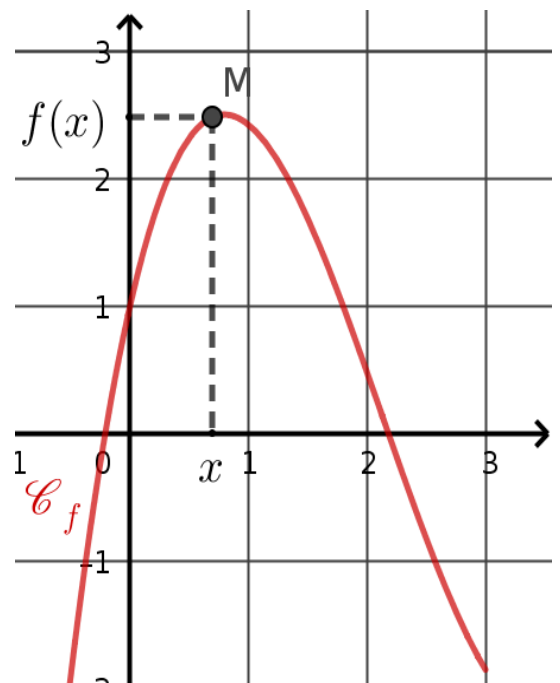
### 2) Représentation graphique

$f$  est une fonction définie sur un ensemble  $D$   
et  
 $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère du plan.

La courbe représentative de  $f$ , généralement notée  $\mathcal{C}_f$  est l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  telles que :

- l'abscisse  $x$  appartient à l'ensemble  $D$  ;
- l'ordonnée  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$

On appelle équation de  $\mathcal{C}_f$  la relation  $y = f(x)$ .



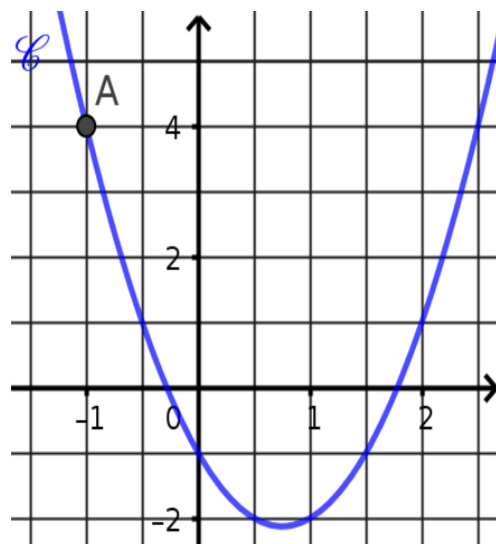
### Application 1 .

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-contre a pour équation  $y = 2x^2 - 3x - 1$ .

1. Le point A d'abscisse  $-1$  appartient à  $\mathcal{C}$ .  
Calculer l'ordonnée de A .

2. Le point B ( 3 ; 6 ) appartient-il à  $\mathcal{C}$  ? Justifier.

3. Déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}$  qui ont pour ordonnée  $-1$  , d'abord graphiquement, puis par le calcul.



### 3) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

- Les solutions de l'équation  $f(x) = k$  sont les **abscisses** des points d'intersection entre  $\mathcal{C}_f$  et la droite d'équation  $y = k$ .
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) > k$  sont les **abscisses** des points de  $\mathcal{C}_f$  situé strictement au-dessus de la droite d'équation  $y = k$ .

### Application 2.

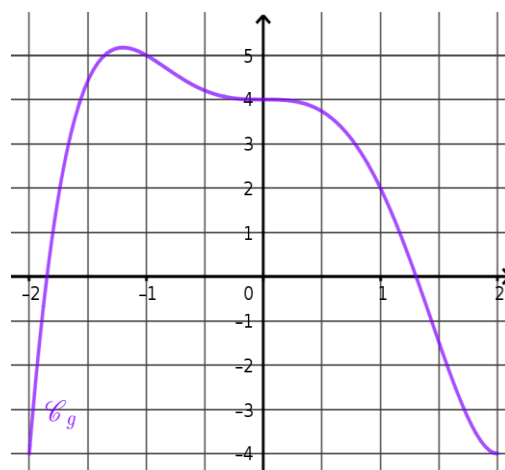
La fonction  $g$  est définie sur l'intervalle  $[-2;2]$  par sa courbe représentative ci-contre. Avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer l'image de 1 par  $g$ .

2. Donner la valeur de  $g(-2)$ .

3. Indiquer les éventuels antécédents de 2 par  $g$ .

4. Résoudre l'équation  $g(x) = 1$ .



5. Résoudre l'inéquation  $g(x) < 2$  .

#### 4) Lecture graphique du signe, lecture graphique des variations

- Établir le tableau de signes d'une fonction  $f$  c'est indiquer sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est **négative, positive ou nulle**.
- Établir le tableau de variations d'une fonction  $f$  c'est indiquer sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est **croissante, décroissante ou constante**.

#### **Application 3.**

1. Construire le tableau de signe de la fonction représentée à l'application 2.

2. Construire le tableau de variation de la fonction représentée à l'application 2.

### III. Fonctions affines (rappels)

#### 1) Définition

Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dite affine s'il existe deux réels  $m$  et  $p$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = m x + p$ . Elle est représentée par la **droite** ( $d$ ) (non parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation  $y = m x + p$ .  
 $m$  est appelé le ..... de ( $d$ )  
et  $p$  est appelé l' ..... de ( $d$ ).

**Exemples.** Les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

$$f(x) = -3x + 5 \quad m = \dots\dots\dots ; p = \dots\dots\dots ; \quad g(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x \quad m = \dots\dots\dots ; p = \dots\dots\dots$$

$$h(x) = 5x \quad m = \dots\dots\dots ; p = \dots\dots\dots ; \quad k(x) = -2 \quad m = \dots\dots\dots ; p = \dots\dots\dots$$

#### Propriétés :

La droite ( $d$ ) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0 ; b)$

Soient  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$ , deux points distincts appartenant à cette droite ( $d$ ).

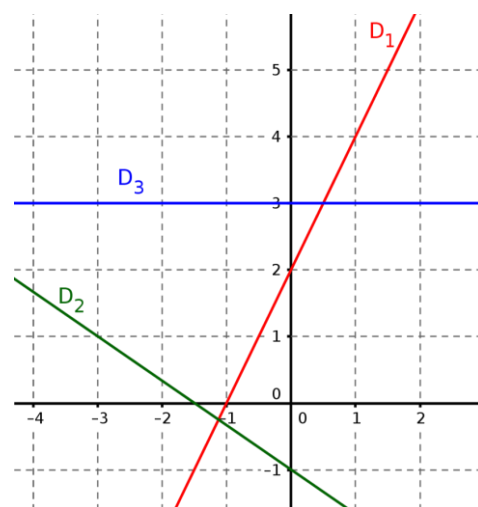
$$\text{Alors on a : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

#### 2) Méthode : trouver graphiquement l'équation d'une droite

- Pour déterminer le coefficient directeur on prend deux points distincts A et B de la droite, à coordonnées entières si possible. Pour calculer  $m$ , on applique la formule  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots\dots\dots$
- Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, on prend l'ordonnée du point de la droite qui est sur l'axe des ordonnées. On a alors  $p = \dots\dots\dots$
- On écrit la conclusion : La droite ( $d$ ) a pour équation  $y = m x + p$  en remplaçant  $m$  et  $p$  par les valeurs trouvées précédemment.

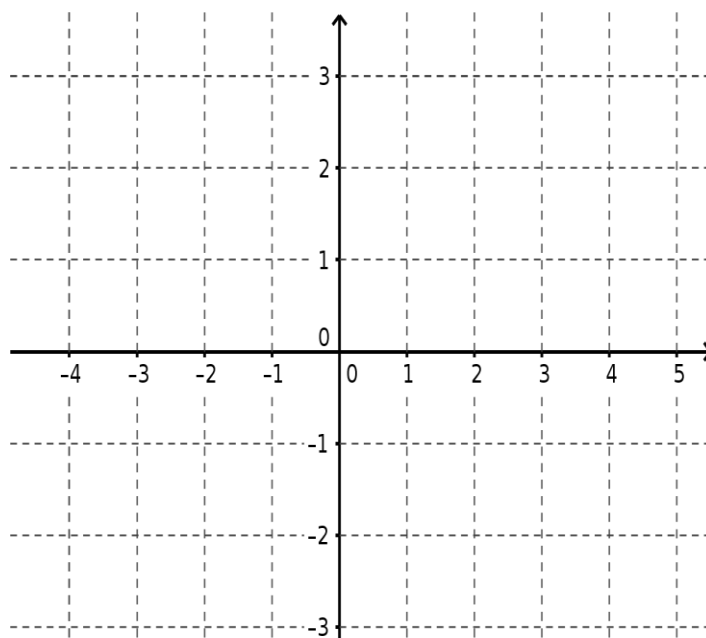
#### Application 4.

Déterminer l'équation des droites représentées sur le repère ci-contre.



### 3) Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine:

- **Équation du type  $y = c$  :**  
la droite est parallèle à l'axe des abscisses  
et passe par le point de coordonnées  $(0 ; c)$ .
- **Équation du type  $y = ax + b$  :**  
la droite n'est pas parallèle à l'un des axes du  
repère, on peut calculer les coordonnées de deux  
points de la droite



#### **Application 5.**

Tracer sur le repère ci contre les droites suivantes :

$$D_1 : y = -2 ; \quad D_2 : y = 2x + 3 \quad \text{et} \quad D_3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

### 4) Méthode pour déterminer une équation de droite connaissant les coordonnées de deux points :

Pour déterminer l'équation de la droite  $(d)$  passant par  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  :

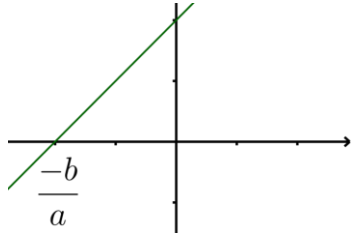
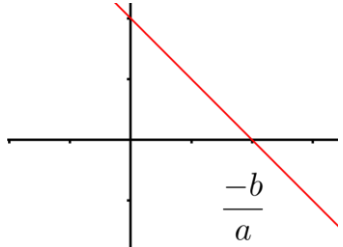
- On calcule d'abord le coefficient directeur avec la formule  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- On détermine  $p$ , à l'aide de l'équation de la droite, on a donc  $y_B = m \times x_B + p$ .

#### **Application 6.**

Déterminer une équation de la droite  $D$  passant par  $A(2 ; -2)$  et  $B(4 ; 1)$

### 5) Sens de variation et signe d'une fonction affine

$f(x) = mx + p$  est une fonction affine et  $D : y = mx + p$  sa représentation graphique. On a :

Variations de $f$  Représentation graphique de $f$  Tableau de signe	<p style="text-align: center;"><b>1<sup>re</sup> cas : <math>m &gt; 0</math></b></p> <p style="text-align: center;"><i><math>f</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></i></p> 	<p style="text-align: center;"><b>2<sup>me</sup> cas : <math>m &lt; 0</math></b></p> <p style="text-align: center;"><i><math>f</math> est décroissante sur <math>\mathbb{R}</math></i></p> 							
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%; text-align: center;"><math>x</math></td><td style="width: 50%;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;"><math>f(x)</math> <math>=mx+p</math></td><td></td></tr> </table>	$x$		$f(x)$ $=mx+p$		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%; text-align: center;"><math>x</math></td><td style="width: 50%;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;"><math>f(x)</math> <math>=mx+p</math></td><td></td></tr> </table>	$x$		$f(x)$ $=mx+p$
$x$									
$f(x)$ $=mx+p$									
$x$									
$f(x)$ $=mx+p$									

### Application 7

Donner les variations ainsi que les signes des fonctions suivantes

a)  $f(x) = -4x + 5$

b)  $g(x) = \frac{3}{4}x - 2$

$x$	
<i>signe de</i> $f(x) = -4x + 5$	

$x$	
<i>signe de</i> $g(x) = \frac{3}{4}x - 2$	

## IV. Taux de variation

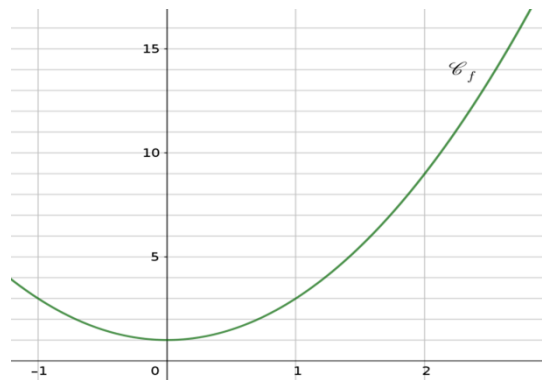
### 1) Définition et interprétation graphique

- Le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est **la pente** de la droite passant par les points d'abscisses  $a$  et  $b$  de la courbe représentative de  $f$ .

#### Application 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 + 1$ .

a) Déterminer le taux de variation de  $f$  entre  $-1$  et  $2$ .



b) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

#### Remarque :

Pour une fonction affine, le taux de variation entre deux réels quelconques est toujours égal à

.....

### 2) Taux de variation et fonctions monotones

#### Définition :

On dit qu'une fonction  $f$  est **monotone** sur un intervalle  $I$ , si  $f$  est :  
soit croissante sur  $I$ , soit décroissante sur  $I$ , soit constante sur  $I$ .

#### Propriétés :

Si le taux de variation d'une fonction  $f$  entre deux nombres quelconques d'un intervalle  $I$  est positif, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

S'il est négatif,  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

S'il est nul,  $f$  est constante sur  $I$ .

#### Application 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 1)^2$ .

Démontrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .