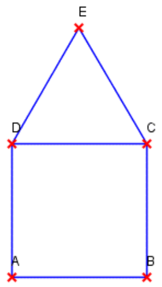
<u>TSpé Fiche d'exercices Le produit scalaire</u>

Pour tous les exercices, on justifiera les calculs faits.

<u>Exercice 1:</u>

On considère la figure ci-contre pour laquelle on sait que ABCD est un carré
et que CDE est un triangle équilatéral.
On pose AB = a , a réel positif.
Déterminer en fonction de a , les valeurs de :
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$,
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$



<u>Exercice 2:</u>

On considère un triangle OAB tel que OA = 5 cm , OB = 3 cm et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \theta\ (2\pi)$.
Pour chacun des cas suivants, faire une figure aux dimensions réelles et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 2) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 3) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

<u>Exercice 3:</u>

On considère un triangle ABC équilatéral tel que AB = a, a réel positif.
Soit G son centre de gravité.
Soit A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB].
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'}$.

<u>Exercice 4 :</u>

On considère un triangle ABC tel que AB = 7 , AC = 5 et BC = 6.

1) Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire celle de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Déterminer la valeur de la longueur AH.
3) Déterminer une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

<u>Exercice 5 :</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(– 3 ; – 1) , B(2 ; 1) et C (1 ; 4).

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
2) Déterminer de même des valeurs approchées des mesures en degré des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$.
3) Vérifier ensuite par le calcul de la somme des mesures des angles d'un triangle l'exactitude des résultats précédents.

CORRECTION

Exercice 1 :

CDE étant un triangle équilatéral, le projeté orthogonal de E sur (CD) est le point I milieu de [CD].

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = CD \times CI = a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{EC} = DC \times IC = a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a^2$,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires ,

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} = CB \times CE \times \cos \widehat{BCE} = a \times a \times \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a^2 \times \cos \frac{5\pi}{6} = a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} a^2$,

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} a^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} a^2$

Exercice 2 :

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \theta = 15 \cos \theta$

si $\theta = \frac{\pi}{3}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

si $\theta = \frac{\pi}{4}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

si $\theta = \frac{5\pi}{6}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 15 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{15\sqrt{3}}{2}$

Exercice 3 :

Le centre de gravité G est le point de concours des médianes mais dans un triangle équilatéral, les médianes sont aussi des hauteurs , des médiatrices et des bissectrices.

Donc les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en G et A' est le projeté orthogonal de A et de G sur (BC) , B' est le projeté orthogonal de B et de G sur (AC) et C' est le projeté orthogonal de C et de G sur (AB).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC' = a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a^2$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC} = BA' \times BC = a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a^2$,

$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GA} = -GA' \times GA$ car $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont de sens contraires

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane en partant du sommet

donc $GA = \frac{2}{3} AA'$ et dans le triangle AA'B rectangle en A', d'après le théorème de Pythagore on a :

$AB^2 = AA'^2 + A'B^2$ donc $AA'^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2 = \frac{3}{4} a^2$ donc $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

Donc $GA = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ et $GA' = AA' - GA = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

Donc $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA} = -GA' \times GA = -\frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{\sqrt{3}}{3} a = -\frac{1}{6} a^2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA'} = A'C \times BA' = \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} a^2$,

$\overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'} = GA' \times GB' \times \cos \widehat{A'GB'}$. Dans le triangle A'CG rectangle en A' on a

$\widehat{GA'C} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{GCA'} = \frac{\pi}{6}$ donc $\widehat{CGA'} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. De même $\widehat{CGB'} = \frac{\pi}{3}$ donc $A'GB' = \frac{2\pi}{3}$

Donc $\overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'} = GA' \times GB' \times \cos \widehat{A'GB'} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{12} a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{24} a^2$

Exercice 4 :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \| \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \| \overrightarrow{CA} \|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - CA^2 \right)$

$= \frac{1}{2}\ (49 + 36 - 25)$

$= 30$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + AC^2 - \| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 + AC^2 - \| \overrightarrow{CB} \|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 + AC^2 - CB^2 \right)$

$= \frac{1}{2}\ (49 + 25 - 36)$

$= 19$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 19$ donc $AH = \frac{19}{AB} = \frac{19}{7}$

3) Dans le triangle ACH rectangle en H on a : $\cos \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{19}{7}}{5} = \frac{19}{35}$ donc $\widehat{HAC} \approx 57{,}12°$

Exercice 5 :

1) $\overrightarrow{AB}\,(5 ; 2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(4 ; 5)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 + 10 = 30$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \sqrt{29} \times \sqrt{41} \times \cos \widehat{BAC}$ donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{30}{\sqrt{29} \times \sqrt{41}}$

$\widehat{BAC} \approx 29{,}54°$

2) $\overrightarrow{CB}\,(1 ; -3)$ et $\overrightarrow{CA}\,(-4 ; -5)$ donc $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -4 + 15 = 11$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos \widehat{ACB} = \sqrt{10} \times \sqrt{41} \times \cos \widehat{ACB}$ donc $\cos \widehat{ACB} = \frac{11}{\sqrt{10} \times \sqrt{41}}$

$\widehat{ACB} \approx 57{,}09°$

$\overrightarrow{BC}\,(-1 ; 3)$ et $\overrightarrow{BA}\,(-5 ; -2)$ donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 5 - 6 = -1$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos \widehat{ABC} = \sqrt{10} \times \sqrt{29} \times \cos \widehat{ABC}$ donc $\cos \widehat{ABC} = -\frac{1}{\sqrt{10} \times \sqrt{29}}$

$\widehat{ABC} \approx 93{,}37°$

3) $29{,}54 + 57{,}09 + 93{,}37 = 180.$

On retrouve la propriété de la somme des mesures des angles d'un triangle. Cette somme vaut 180°.