ORTHOGONALITE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

La définition d'un vecteur est la même que dans le plan.
Les propriétés et les calculs vectoriels sont aussi les mêmes.

I. Définition et propriétés :

On étend à l'espace, les définitions données dans le plan.

1) Extension du produit scalaire à l'espace :

a) Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires s' il existe trois points A, B, C d'un plan (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P). On a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Conséquences :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$

- si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

  et alors, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$

  Conséquence :si A , B et C sont trois points de l'espace , $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

c) Propriétés : on retrouve les mêmes que dans le plan.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

2) Base orthonormée et repère orthonormé de l'espace :

Une base orthonormée de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants

$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Un repère orthonormé de l'espace est la donnée d'un point et d'une base orthonormée de l'espace.

3) Norme d'un vecteur de l'espace :

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace.

Soit $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ deux vecteurs de l'espace.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

4) Applications :

a) Les vecteurs $\vec{u}(1 ; -2 ; 5)$ et $\vec{v}(1 ; 3 ; 1)$ sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 - 2 \times 3 + 5 \times 1 = 1 - 6 + 5 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

b) ABCD est un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.
I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [CD].

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis AI et AJ.
- Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AJ}$.
- Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{IAJ}$. Arrondir au dixième.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(6^2 + 6^2 - 6^2) = 18$.

De même $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 18$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 18$

Dans le triangle AIC rectangle en I, $AI^2 = AC^2 - IC^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ donc $AI = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

De même $AJ = 3\sqrt{3}$.

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{4}(18 + 18 + 6^2 + 18)$$

$$= 22{,}5.$$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AJ})$ donc $22{,}5 = 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \cos(\widehat{AIJ})$

donc $\cos(\widehat{AIJ}) = \frac{5}{6}$

donc grâce à la calculette, $\widehat{AIJ} \approx 33{,}6°$

II. Orthogonalité dans l'espace :

1) Orthogonalité de deux droites :

Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

2) Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Conséquence : (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Les droites (A, $\vec{u}$) et (B, $\vec{v}$) sont orthogonales $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3) Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

La droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale au plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **ET** $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Cette définition permet de démontrer la propriété : " une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan ".

III. Orthogonalité de deux plans dans l'espace :

1) Vecteur normal à un plan :

a) Définition :

On appelle vecteur normal à un plan (P), tout vecteur $\vec{n}$, non nul, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P), par exemple deux vecteurs directeurs de (P).

b) Conséquences:

- La droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan (P).
- Si (P) est le plan (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) alors on a :
  $\vec{n}$ vecteur normal au plan (P) $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ **et** $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

c) Propriétés :

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P), $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de (P).
- Si A et M sont des points de (P) alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

2) Plans parallèles :

Deux plans seront parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

3) Plans orthogonaux :

Deux plans seront orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

IV. Equation cartésienne d'un plan dans l'espace :

Soit (P) un plan contenant le point A (x_A , y_A , z_A) et de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c).
Ce plan est l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + (- x_A \times a - y_A \times b - z_A \times c) = 0$.
On pose $d = - x_A \times a - y_A \times b - z_A \times c$ et on obtient la définition suivante :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, tout plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c) admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$ avec a ,b, c non tous nuls.

Réciproquement :
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M(x , y , z) vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c).

Exemples:

1) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\vec{u}(- 2 ; 3 ; 4)$ et contenant le point A (0 ; – 1 ; 3).

(P) a une équation de la forme $- 2x + 3y + 4z + d = 0$
$A \in (P)$ donc $- 2 \times 0 + 3 \times (- 1) + 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = - 9$
L'équation cartésienne de (P) est donc $- 2x + 3y + 4z - 9 = 0$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) passant par A(3 ; – 5 ; 1); B(– 1 ; 0 ; 2) et C(2 ; 1 ; 3).

$\overrightarrow{AB} (- 4 ; 5 ; 1)$ et $\overrightarrow{AC} (- 1 ; 6 ; 2)$ sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires ($\frac{-4}{-1} \neq \frac{6}{5}$).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc des vecteurs directeurs du plan (P).
Un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) normal au plan (P) vérifie :
$\vec{n} . \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} . \overrightarrow{AC} = 0$