Lycée l' Oiselet **Février 2025**

BACCALAURÉAT BLANC 2025 DE MATHÉMATIQUES

– SPÉCIALITÉ - MATHS –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *Le nom de votre professeur de Spécialité.*

Exercice 1 :

Partie A :

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$),
on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2)

et la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(2 ; 1 ; – 1) Réponse B : N(– 3 ; – 4 ; 6)

Réponse C : P(– 3 ; – 4 ; 2) Réponse D : Q(– 5 ; – 5 ; 1)

2) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Réponse B : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Réponse D : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ Réponse B : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ Réponse D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

4) On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; – 1 ; – 1) Réponse D : Les points A, B, C, D sont alignés

Partie B :

Cette partie est un vrai ou faux. Il faudra justifier la réponse.

On donne la droite Δ' dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 5 + 3s \\ y = 1 - s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

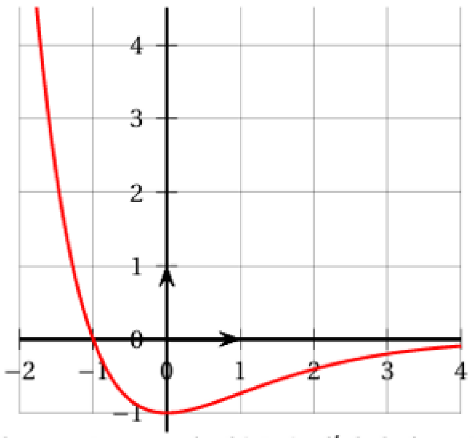
Affirmation : Les droites Δ et Δ' sont sécantes.

Exercice 2 :

Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
A l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1) Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie B:

On admet que la fonction f mentionnée dans la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1) a) Montrer que, pout tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + 2\,e^{-x}$.
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   c) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
   b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3) Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
   Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Exercice 3 :

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) défine par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$ où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1) Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

   b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 :

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A :

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test)
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test)

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'événement " l'athlète est dopé " et T l'événement " le test est positif ".
On admet que la probabilité de l'événement D est égale à 0,08.

1) Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2) Démonter que $P(T) = 0{,}083$.
3) a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement "un athlète présentant un test positif est dopé " est supérieure ou égale à 0,95.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B :

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1) Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
   b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2) a) Quelle est la probabilité qu'exactement 2 athlètes contrôlés présentent un test positif ?
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

Correction exercice 1

Partie A

1) Réponse B : $Explications$: En choisissant $t=-2$, on obtient $\begin{cases} x=1+2\times(-2) \\ y=-2+(-2) \\ z=4-(-2) \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=6 \end{cases}$

Donc la droite (d) passe par le point $N(-3;-4;6)$

2) Réponse C : $Explications$: On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et enfin $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) Réponse B : $Explications$ En choisissant le point $B(2;1;0)$ et $-\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur

4) Réponse A : Explications : $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

Partie B

$$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(\Delta') \Leftrightarrow \exists(t;s)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} 1+2t=5+3s \\ -2+t=1-s \\ 4-t=2+2s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(t;s)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} 1+2t=5+3s \\ -5=-3-5s \\ 9=9+7s \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3+L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists(t;s)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} 1+2t=5+3s \\ s=\dfrac{2}{5} \\ s=0 \end{cases}$$

La dernière proposition est fausse, donc par équivalence, la première l'est également.
Donc les droites Δ et Δ' ne sont pas sécantes.

Correction exercice 2

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée $f\,'$:

- la fonction $f\,'$ est positive sur $]-\infty\,;\,1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.
- la fonction $f\,'$ est négative sur $]1\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée $f\,'$:

- la fonction $f\,'$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
- la fonction $f\,'$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$

1. b) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissances comparées} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0 \end{array}\right\}$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = 0$

1.c) On en déduit, selon la question 1.b) que la courbe C_f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2.a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-e^{-x}) = \big(1-(x+2)\big)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$

2.b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

On obtient donc le tableau suivant en remarquant que $f(-1) = (-1+2)e^1 = e^1 = e$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2.c) • Sur $[-2;-1]$, la fonction f est continue car dérivable

- Sur $[-2;-1]$, la fonction f est strictement croissante
- 2 est une valeur comprise entre $f(-2) = 0$ et $f(-1) = e$

Donc, selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[-2;-1]$.

A l'aide de la calculatrice $\alpha \approx -1{,}6$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = \big(-1-(-x-1)\big)e^{-x} = xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de x. On obtient donc les résultats suivants :

- Sur $]-\infty;\,0[$, $f\,''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0;\,+\infty[$, $f\,''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de C_f est le point d'inflexion de cette courbe.

Correction exercice 3

1) f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{5(x+2)-(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$\forall x \geq 0, f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2-a)

- Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ »
- Initialisation :

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5u_0+4}{u_0+} = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  Or $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité :

  Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \geq 0$ fixé, et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

  Par HR, on a $\quad 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$

  donc $\quad f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$ $\quad$ # car f est strictement croissante sur $[0;4]$

  donc $\quad 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ $\quad$ # car $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

  donc $\quad 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$

  donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie

- La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie, et héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

2-b) Nous avons montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers une limite ℓ.

3) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est convergente vers une limite ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \forall x \geq 0, f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{5x+4}{x+2} = x \\
&\Leftrightarrow 5x+4 = x^2+2x \\
&\Leftrightarrow 0 = x^2-3x-4 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4 \quad \#
\end{aligned}$$

car $\Delta = (-3)^2 - 4\times(-4) = 25 = 5^2$ et donc $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

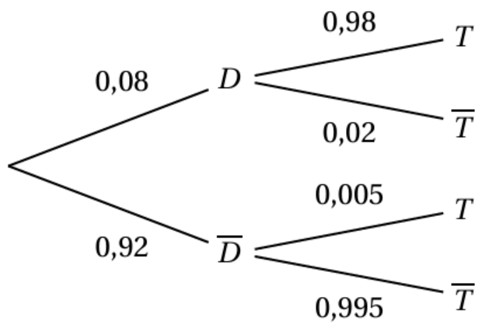
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$ car (u_n) est croissante, donc $\ell \geq u_0$ avec $u_0 = 1$.

D'où $\ell = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Correction exercice 4

Partie A.

1)



2) Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. Donc, selon la formule des probabilités totales, on a : $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$

$= P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T)$

$= 0{,}08 \times 0{,}98 + 0{,}92 \times 0{,}005$

$= 0{,}083$

3.a) On cherche $P_T(D)$.

Or $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(D) \times P_D(T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0784}{0{,}083} \approx 0{,}945$

3.b) D'après la question précédente, $P_T(D) < 0{,}95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1.a) Il s'agit d'une répétition de 5 épreuves identiques et indépendantes, chaque épreuve n'ayant que deux issues T et $\overline{T}$, la probabilité du succès T « l'athlète présente un test positif » étant égale à 0,103.
Donc la variable X qui donne le nombre de succès sur 5 tirages suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}103$.

1.b) On sait que $E = n \times p = 5 \times 0{,}103 = 0{,}515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 0,5 athlètes sur 5 contrôlé positif, soit encore à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

3.a) La probabilité qu'exactement deux athlètes contrôlés présentent un test positif est :

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}103^2 \times (1 - 0{,}103)^{5-2} \approx 0{,}077$

3.b) La probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}103)^5 \approx 0{,}419$