ORTHOGONALITE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

La définition d'un vecteur est la même que dans le plan.
Les propriétés et les calculs vectoriels sont aussi les mêmes.

I. Définition et propriétés :

On étend à l'espace, les définitions données dans le plan.

1) Extension du produit scalaire à l'espace :

a) Définition :

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires s' il existe trois points A, B, C d'un plan (P) tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P). On a donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Conséquences :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$

- si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

  et alors, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \right)$

  Conséquence : si A , B et C sont trois points de l'espace , $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

c) Propriétés : on retrouve les mêmes que dans le plan.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

2) Base orthonormée et repère orthonormé de l'espace :

Une base orthonormée de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Un repère orthonormé de l'espace est la donnée d'un point et d'une base orthonormée de l'espace.

3) Norme d'un vecteur de l'espace :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
Soit $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ deux vecteurs de l'espace.
Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace.
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

4) Applications :

a) Les vecteurs $\vec{u}(1 ; -2 ; 5)$ et $\vec{v}(1 ; 3 ; 1)$ sont-ils orthogonaux ?

b) ABCD est un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.
I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [CD].

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis AI et AJ.
- Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AJ}$.
- Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{IAJ}$. Arrondir au dixième.

II. Orthogonalité dans l'espace :

1) Orthogonalité de deux droites :

Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

2) Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Conséquence : (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Les droites (A, $\vec{u}$) et (B, $\vec{v}$) sont orthogonales $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3) Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

La droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale au plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **ET** $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Cette définition permet de démontrer la propriété : " une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan ".

III. Orthogonalité de deux plans dans l'espace :

1) Vecteur normal à un plan :

a) Définition :

On appelle vecteur normal à un plan (P), tout vecteur $\vec{n}$, non nul, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P), par exemple deux vecteurs directeurs de (P).

b) Conséquences:

- La droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan (P).
- Si (P) est le plan (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) alors on a :
  $\vec{n}$ vecteur normal au plan (P) $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ **et** $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

c) Propriétés :

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P), $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de (P).
- Si A et M sont des points de (P) alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

2) Plans parallèles :

Deux plans seront parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

3) Plans orthogonaux :

Deux plans seront orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

IV. Equation cartésienne d'un plan dans l'espace :

Soit (P) un plan contenant le point A (x_A , y_A , z_A) et de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c).
Ce plan est l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + (- x_A \times a - y_A \times b - z_A \times c) = 0.$
On pose $d = - x_A \times a - y_A \times b - z_A \times c$ et on obtient la définition suivante :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, tout plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c) admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$ avec a ,b, c non tous nuls.

Réciproquement :
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M(x , y , z) vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b , c).

Exemples:

1) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\vec{u}$ (– 2 ; 3 ; 4) et contenant le point A (0 ; – 1 ; 3).

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) passant par A(3 ; – 5 ; 1); B(– 1 ; 0 ; 2) et C(2 ; 1 ; 3).

Cas particuliers : Dans un repère orthonormé de l'espace (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

- Equation du plan ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{i}$ et contenant le point O (plan (yOz))
  $\vec{i}$ (1 ; 0 ; 0) donc on a $1x + 0y + 0z + d = 0 \Leftrightarrow x + d = 0$
  Or $x = 0$ donc $d = 0$ et on a donc $x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  $x = 0$ est donc l'équation cartésienne du plan (yOz).

- Equation du plan ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{j}$ et contenant le point O (plan (xOz))
  $\vec{j}$ (0 ; 1 ; 0) donc on a $0x + 1y + 0z + d = 0 \Leftrightarrow y + d = 0$
  Or $y = 0$ donc $d = 0$ et on a donc $y + 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0$
  $y = 0$ est donc l'équation cartésienne du plan (xOz).

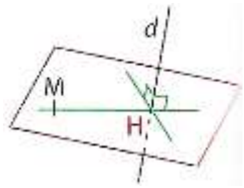
- Equation du plan ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$ et contenant le point O (plan (xOy))
  $\vec{k}$ (0 ; 0 ; 1) donc on a $0x + 0y + 1z + d = 0 \Leftrightarrow z + d = 0$
  Or $z = 0$ donc $d = 0$ et on a donc $z + 0 = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  $z = 0$ est donc l'équation cartésienne du plan (xOy).

V. Distance d'un point à une droite ou à un plan :

1) Distance d'un point à une droite :

a) Projeté orthogonal d'un point sur une droite:

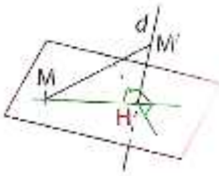
On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)
le point d'intersection H de la droite (d)
avec le plan orthogonal à (d) et contenant le point M.



b) Propriétés:

- Si M appartient à la droite (d), le projeté de M sur (d) est M lui–même .

- Si M n'appartient pas à la droite (d) , le point H, projeté orthogonal de M sur (d) est le point de la droite (d) le plus proche de M.
  On dit donc que **la distance MH est la distance du point M à la droite (d).**



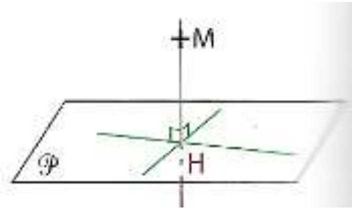
Démonstration :

- Si M appartient à la droite (d), M et H sont confondus donc MH = 0
  ce qui est la plus petite valeur possible pour une distance.
- Si M n'appartient pas à la droite (d) alors, pour tout point M' de (d),
  le triangle MM'H est un triangle rectangle en H.
  Son hypoténuse [MM'] est donc le côté le plus long donc MH < MM' quel que soit M' sur (d). Donc la distance MH est bien la distance la plus courte entre le point M et un point de la droite (d).

2) Distance d'un point à un plan :

a) Projeté orthogonal d'un point sur un plan:

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur un plan (P)
le point d'intersection H du plan (P)
avec la droite orthogonale à (P) et contenant le point M.



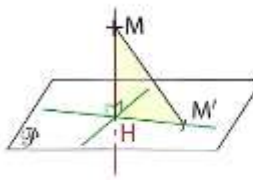
b) Propriétés:

- Si M appartient au plan (P), le projeté de M sur (P) est M lui–même .

- Si M n'appartient pas au plan (P), le point H, projeté orthogonal de M sur (P) est le point du plan (P), le plus proche de M.
  On dit donc que **la distance MH est la distance du point M au plan (P).**

Démonstration :

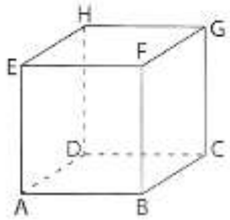
- Si M appartient au plan (P), M et H sont confondus donc MH = 0
  ce qui est la plus petite valeur possible pour une distance.



- Si M n'appartient pas au plan (P) alors, pour tout point M' de (P),
  le triangle MM'H est un triangle rectangle en H. Son hypoténuse [MM'] est donc le côté le plus long donc MH < MM' quel que soit M' sur (P). Donc la distance MH est bien la distance la plus courte entre le point M et un point du plan (P).

3) Exemples :

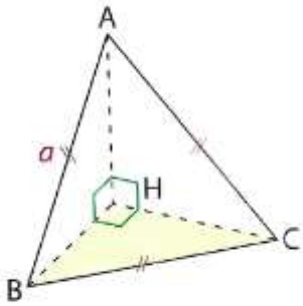
a)



1) Déterminer le projeté orthogonal de H sur le plan (CDG).

2) Déterminer le projeté orthogonal de F sur la droite (CD).

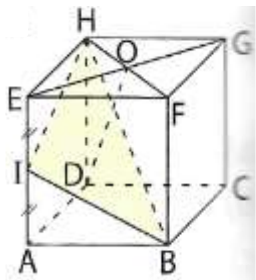
b)



ABCH est un tétraèdre tel que ABC est un triangle équilatéral d'arête a (a > 0) et les autres faces sont des triangles rectangles en H.

1) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.
2) Développer et réduire le produit scalaire ($\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$) . ($\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}$)
3) Exprimer la distance du point A au plan (BHC) en fonction de a.

c) ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
O est le centre de la face EFGH.
I est le milieu de l'arête [AE].
On se place dans le repère orthonormé (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).



1) a) Donner les coordonnées des points A, B, D, E , H , O et I.
   b) Démontrer que les droites (DO) et (BI) d'une part et les droites (DO) et (BH) d'autre part sont orthogonales.
   c) En déduire que la droite (DO) est orthogonale au plan (BIH).
2) a) Justifier que les droites (DO) et (BH) sont sécantes en un point K.
   b) Déterminer l'aire du triangle BDH.
   c) En déduire la distance du point O au plan (BIH).

4) Formule de la distance d'un point à un plan :

On donne (P) un plan d'équation cartésienne $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$. $M(x ; y ; z)$ est un point de (P).
$A (x_A ; y_A ; z_A)$ est un point quelconque de l'espace et H son projeté orthogonal sur (P).

a) Justifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$

b) En utilisant la formule du cosinus en déduire une expression de $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$.

c) Que peut-on dire de l'angle $(\overrightarrow{AH} , \overrightarrow{n})$? En déduire que $| \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} | = AH \times \| \overrightarrow{n} \|$.

d) Simplifier l'expression analytique de $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (on pourra remarquer que $d = -a\,x - b\,y - c\,z$)

e) En déduire une expression de la distance de A à (P).

Application :

Déterminer la distance de N(3 ; 4 ; 1) à (P) : $2x - 2y + z + 4 = 0$

a) J'applique la formule :

b) Je raisonne avec le projeté orthogonal de N sur (P) :