DM 5 Limites et études de fonctions

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 - 3x + 1}{4x^2 + 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^3 - 2x}{2x - 10}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \cos(x)}{x^2 + 2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3x^2 + 1}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 1}{2x^2 + 5}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x+7} - e^7}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x + 2}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x + 2\,e^x - 5}{e^{2x} - 3}$

10) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$

Exercice 2 : Page 185 n° 95

Exercice 3 : Page 181 n° 68

CORRECTION

Corrigé exercice 95 :

Partie A

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
2.
   a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   b. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

   c. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, trouver la limite de h en $+\infty$ revient à poser $X = 2x + 1$ et à calculer $\lim_{X\to+\infty} e^X$

   Donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Partie B

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
2.
   a. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

   b. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

   c. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, trouver la limite de h en $+\infty$ revient à poser $X = -x$ et à calculer $\lim_{X\to-\infty} e^X$.

   Donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Corrigé exercice 68 :

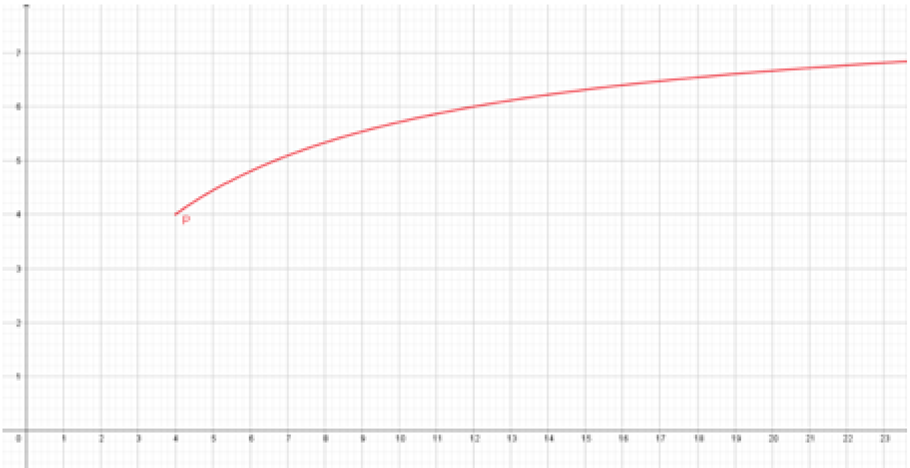
1. $D = \dfrac{2\times 1,5\times 3}{1,5+3} = 2$ La distance de mise au point est de 3m.
2.
   a. Pour tout $\mathrm{P}_2 \geqslant 0$, $D = \dfrac{2\times 4\mathrm{P}_2}{4+\mathrm{P}_2} = \dfrac{8\mathrm{P}_2}{4+\mathrm{P}_2}$.

   Or, pour tout $\mathrm{P}_2 \geqslant 0$, $8 - \dfrac{32}{4+\mathrm{P}_2} = \dfrac{32+8\mathrm{P}_2-32}{4+\mathrm{P}_2}$.

   D'où $D = 8 - \dfrac{32}{4+\mathrm{P}_2}$.

   b. On pose $x = \mathrm{P}_2$. La fonction D définie par $D(x) = 8 - \dfrac{32}{4+x}$ est définie et dérivable sur $[4;+\infty[$. Et, pour tout $x \in [4;+\infty[$, $D'(x) = \dfrac{32}{(4+x)^2}$.

   La dérivée de D est strictement positive sur $[4;+\infty[$, la fonction est donc strictement croissante sur ce même intervalle.



c. On a $\lim_{x \to +\infty} D(x) = 8$. La distance de mise au point pour que la netteté s'étende de 4 m à l'infini est donc égale à 8 m.

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2-3x+1}{4x^2+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

La droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) Etude du signe de $2x-10$:

$2x-10 \geq 0$

$2x \geq 10$

$x \geq 5$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
signe de $2x-10$	$-$	0	$+$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} 2x-10 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} 2x-10 = 0^+$

$\lim\limits_{x\to5} 2x^3-2x = 240$.

donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} \dfrac{2x^3-2x}{2x-10} = -\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{2x^3-2x}{2x-10} = +\infty$

La droite d'équation $x=5$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3). $\dfrac{3x+\cos x}{x^2+2} = \dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{\cos x}{x^2+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$.

$-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout réel x.

$\dfrac{-1}{x^2+2} \leq \dfrac{\cos x}{x^2+2} \leq \dfrac{1}{x^2+2}$ car $x^2+2>0$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+2} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+2} = 0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\cos x}{x^2+2} = 0$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

4) $\dfrac{e^x-3x^2+1}{x^2} = \dfrac{e^x}{x^2} - 3 + \dfrac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\times n\right)^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n \times n^n} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Posons $X = \dfrac{x}{n}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

De plus $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n > 0$ donc par produit $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - 3 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3x^2 + 1}{x^2} = +\infty$

5). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 0}{2x}}_{} \times 2 = 0$

nombre dérivé
de la fonction cosinus
en 0 donc $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x + 1}{2x^2 + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

7) $\frac{e^{2x+7} - e^7}{x} = \frac{e^7 (e^{2x} - 1)}{x} = 2e^7 \times \frac{e^{2x} - e^0}{2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x+7} - e^7}{x} = 2e^7 \times \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^0}{2x}}_{} = 2e^7$.

nombre dérivé
de la fonction exponentielle en 0.
donc $\exp'(0) = 1$.

8). $\frac{x + \sin x}{x + 2} = \frac{x}{x + 2} + \frac{\sin x}{x + 2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$.

$-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout réel x.

$\frac{-1}{x+2} \geq \frac{\sin x}{x+2} \geq \frac{1}{x+2}$

car si $x \to -\infty$ $x + 2 < 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x + 2} = 0$.

Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + \sin x}{x + 2} = 1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

9). $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (limite de référence)

$\lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0$

$\lim -5 = -5$.

par somme

$\lim_{x \to -\infty} xe^x + 2e^x - 5 = -5$

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} -3 = -3$

par somme

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - 3 = -3$.

Par quotient $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x + 2e^x - 5}{e^{2x} - 3} = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3}$.

La droite d'équation $y = \frac{5}{3}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.