FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRE 2

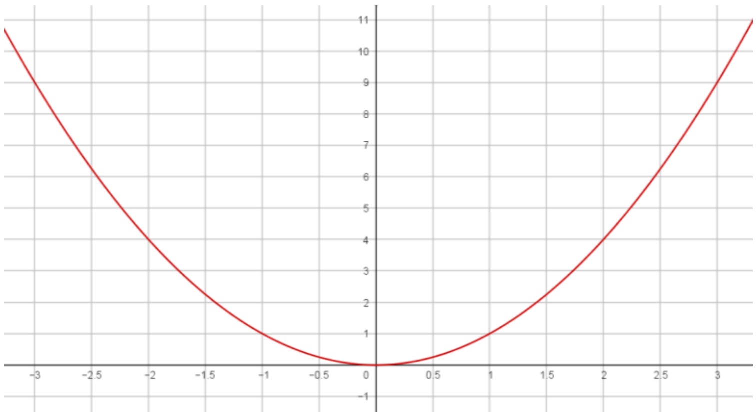
1) Rappel : la fonction carré.

La fonction carré est la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$.

a) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une parabole de sommet S (0 ; 0).
La courbe admet un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.

c) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	↘	0	↗

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

d) Signe de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	+	

Pour tout x réel, $x^2 \geq 0$.

La fonction carré est positive ou nulle sur IR

e) Parité :

On remarque que $(-2)^2 = 4 = 2^2$; $(-5)^2 = 25 = 5^2$

L'image par la fonction carré d'un nombre et de son opposé sont identiques.

$(-x)^2 = x^2$ **On dira que la fonction carré est paire.**

Toutes les fonctions paires ont l'axe des ordonnées comme axe de symétrie pour leur courbe représentative.

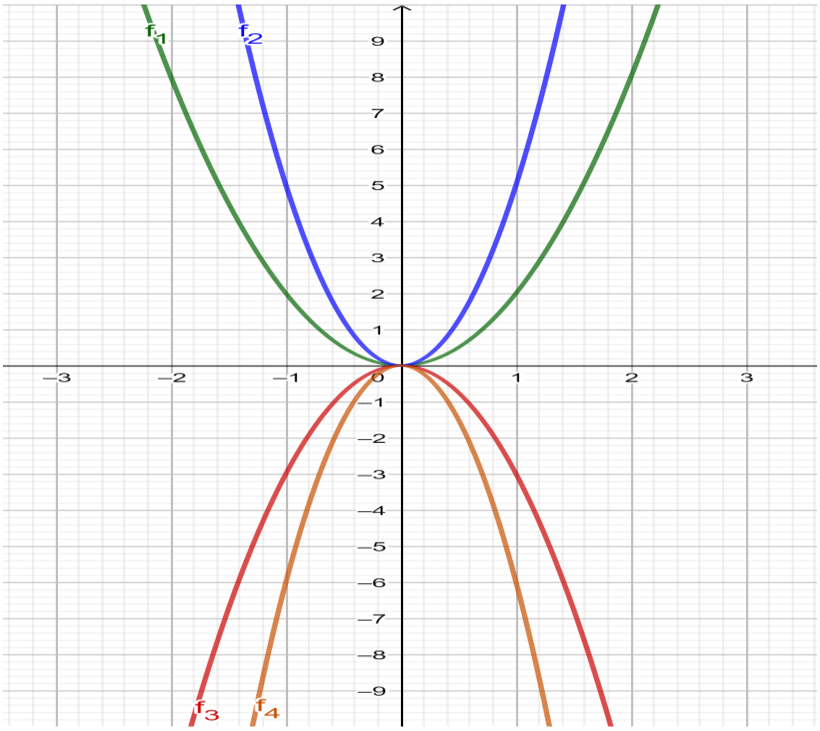
2) Les fonctions du type $f(x) = ax^2$

a) $f_1(x) = 2x^2$; $f_2(x) = 5x^2$; $f_3(x) = -3x^2$; $f_4(x) = -4x^2$

Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	8	2	0	2	8
$f_2(x)$	20	5	0	5	20
$f_3(x)$	-12	-3	0	-3	-12
$f_4(x)$	-16	-4	0	-4	-16

Représenter sur le même graphique les fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 :



b) Constatations :

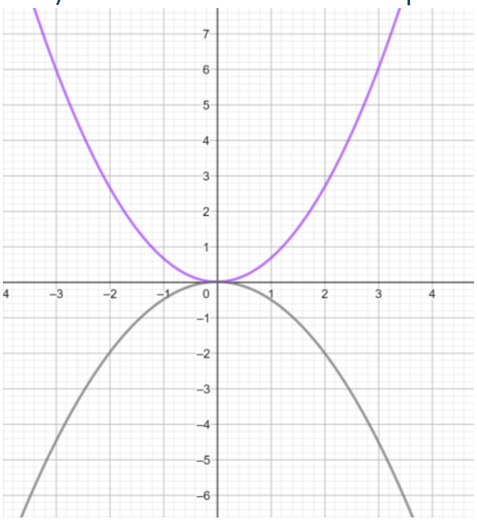
Les courbes admettent un axe de symétrie : l'axe des ordonnées.

Elles passent par l'origine du repère, le point (0 ; 0).

Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut

Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas

c) Retrouver les fonctions représentées sur le graphique :



La parabole violette est tournée vers le haut, elle admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et elle passe par (0 ; 0).
Elle représente donc une fonction f du type $f(x) = a\,x^2$ avec $a > 0$.
Elle passe par le point A(3 ; 6) donc $f(3) = 6$

$f(3) = a \times 3^2$ donc $6 = a \times 9$ donc $a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ donc $f(x) = \frac{2}{3}x^2$.

La parabole noire est tournée vers le bas, elle admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et elle passe par (0 ; 0).
Elle représente donc une fonction g du type $g(x) = a\,x^2$ avec $a < 0$.
Elle passe par le point B(2 ; – 2) donc $g(2) = -2$

$g(2) = a \times 2^2$ donc $-2 = a \times 4$ donc $a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ donc $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

3) Les fonctions du type $g(x) = ax^2 + b$

Si a = 1 et b = 0 on retrouve la fonction carré.

a) Quelques exemples :

Pour chaque valeur de a et b suivantes:

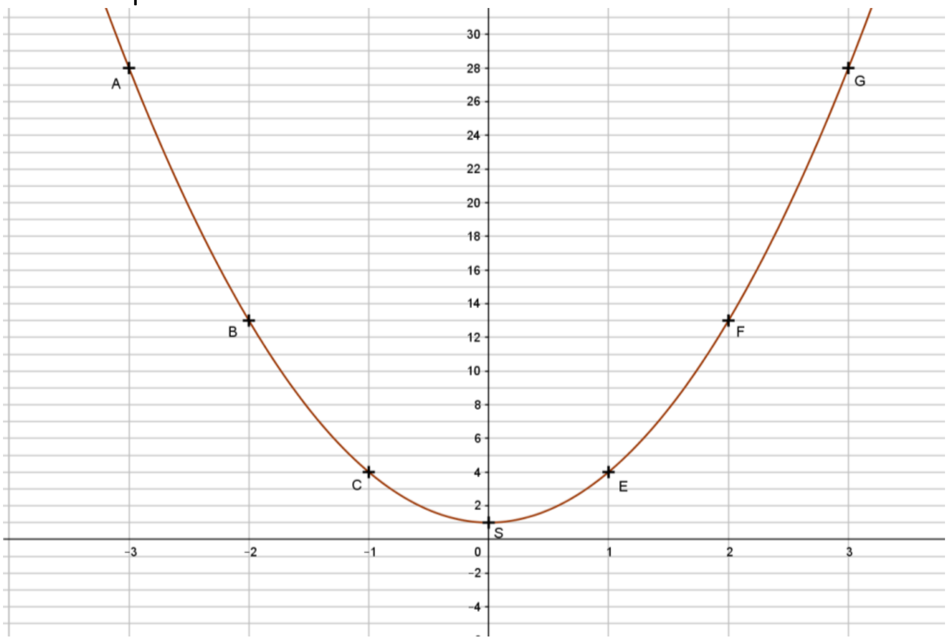
- Ecrire la fonction g correspondante.
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations
- Compléter le tableau de signes.

➢ **a = 3 et b = 1** $g(x) = 3x^2 + 1$

Tableau de valeurs :

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
$g(x)$	28	13	4	1	4	13	28

Courbe représentative :



Axe de symétrie : axe des ordonnées

Coordonnées du sommet : S (0 ; 1)

Intersections avec l'axe des abscisses : Il n'y en a pas

Intersections avec l'axe des ordonnées : y = 1

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g	↘	1	↗

Tableau de signes :

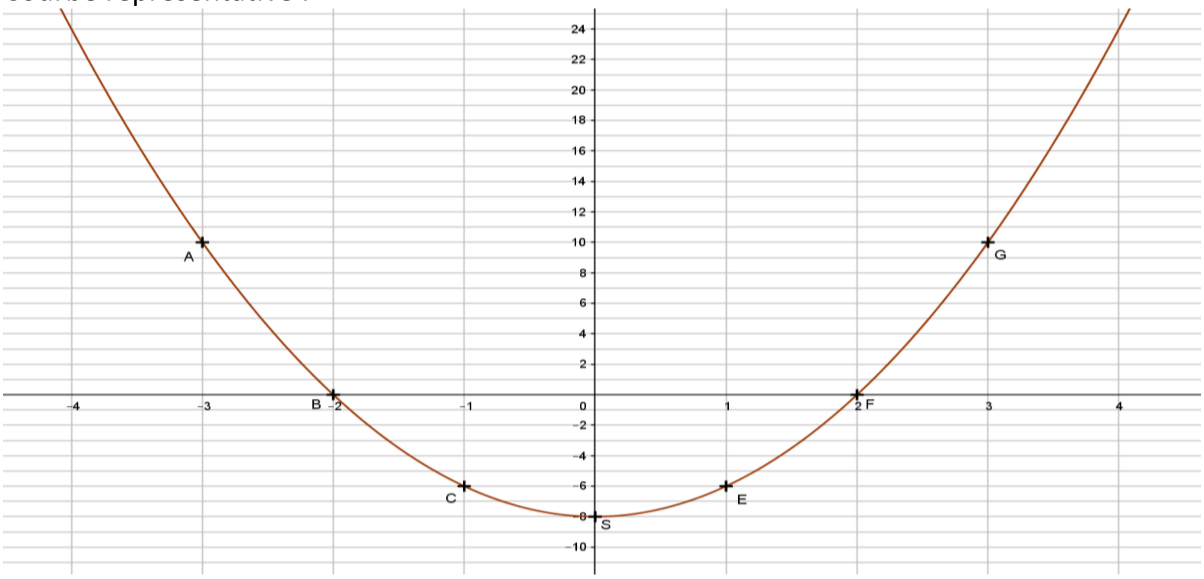
x	$-\infty$		$+\infty$
signes de $g(x)$		+	

➢ **a = 2 et b = − 8** g(x) = $2x^2 - 8$

Tableau de valeurs :

x	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4
g(x)	24	10	0	− 6	− 8	− 6	0	10	24

Courbe représentative :



Axe de symétrie : axe des ordonnées

Coordonnées du sommet : S (0 ; − 8)

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = -2$ *et* $x = 2$

Intersections avec l'axe des ordonnées : $y = -8$

Tableau de variations :

x	− ∞	0	+ ∞
variations de g	↘	− 8	↗

Tableau de signes :

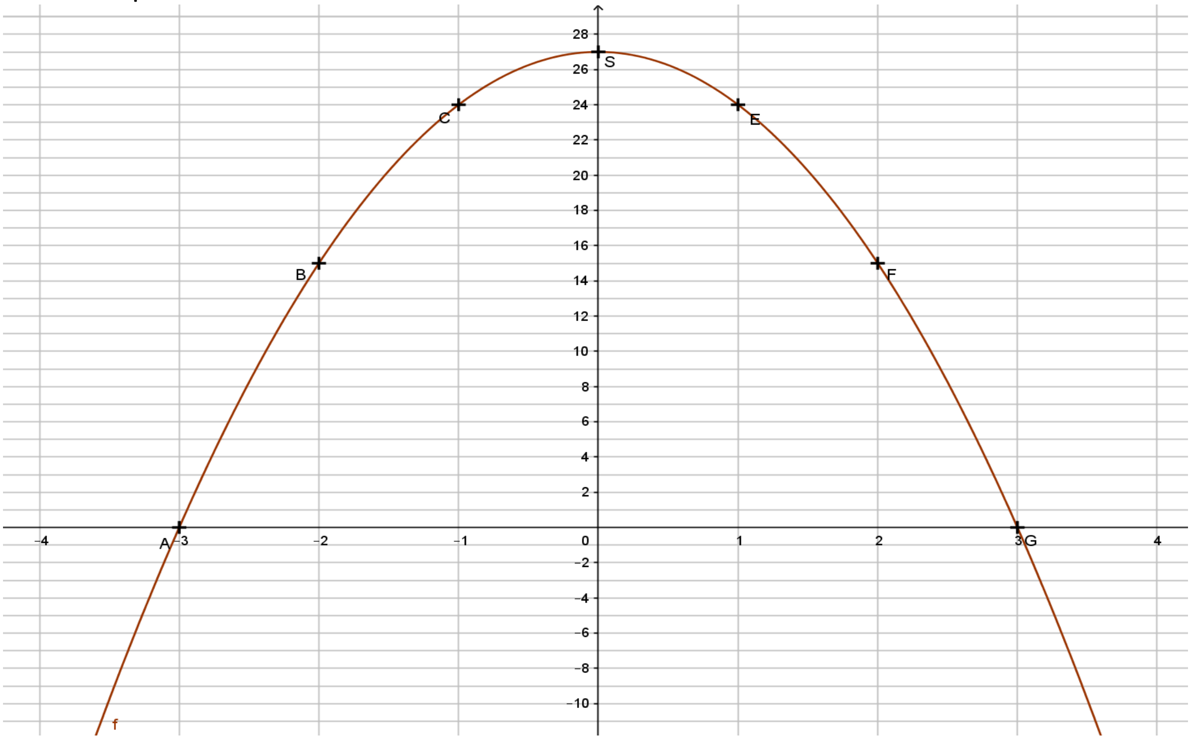
x	− ∞		− 2		2		+ ∞
signes de g(x)		+	0	−	0	+	

- **a = – 3 et b = 27** g(x) = $-3x^2 + 27$

Tableau de valeurs :

x	– 3,5	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
g(x)	– 9,75	0	15	24	27	24	15	0	– 21

Courbe représentative :



Axe de symétrie : axe des ordonnées

Coordonnées du sommet : S (0 ; 27)

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = -3$ et $x = 3$

Intersections avec l'axe des ordonnées : y = 27

Tableau de variations :

x	– ∞		0		+ ∞
variations de g		↗	27	↘	

Tableau de signes :

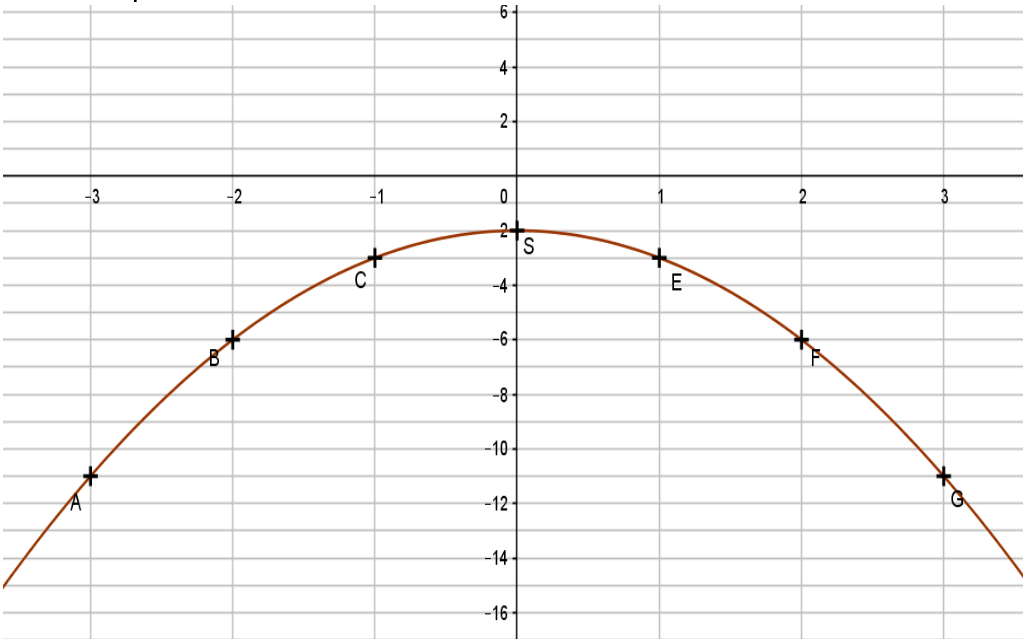
x	– ∞		– 3		3		+ ∞
signes de g(x)		–	0	+	0	–	

- **a = – 1 et b = – 2** g(x) = $-x^2-2$

Tableau de valeurs :

x	– 2	– 1	0	1	2
g(x)	– 6	– 3	– 2	– 3	– 6

Courbe représentative :



Axe de symétrie : axe des ordonnées

Coordonnées du sommet : S (0 ; – 2)

Intersections avec l'axe des abscisses : aucune

Intersections avec l'axe des ordonnées : y = – 2

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g	↗	– 2	↘

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
signes de g(x)	–	

b) A retenir :

$g(x) = a\,x^2 + b$

- g est une fonction définie sur IR.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
- g est représentée par une parabole, dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et le sommet S a pour coordonnées (0 ; b).
- La fonction g est donc paire.
- Le sens de variation de g dépend du signe de a.

Si a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g	$\searrow$	b	$\nearrow$

La parabole est tournée vers le haut.
La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

Si a < 0

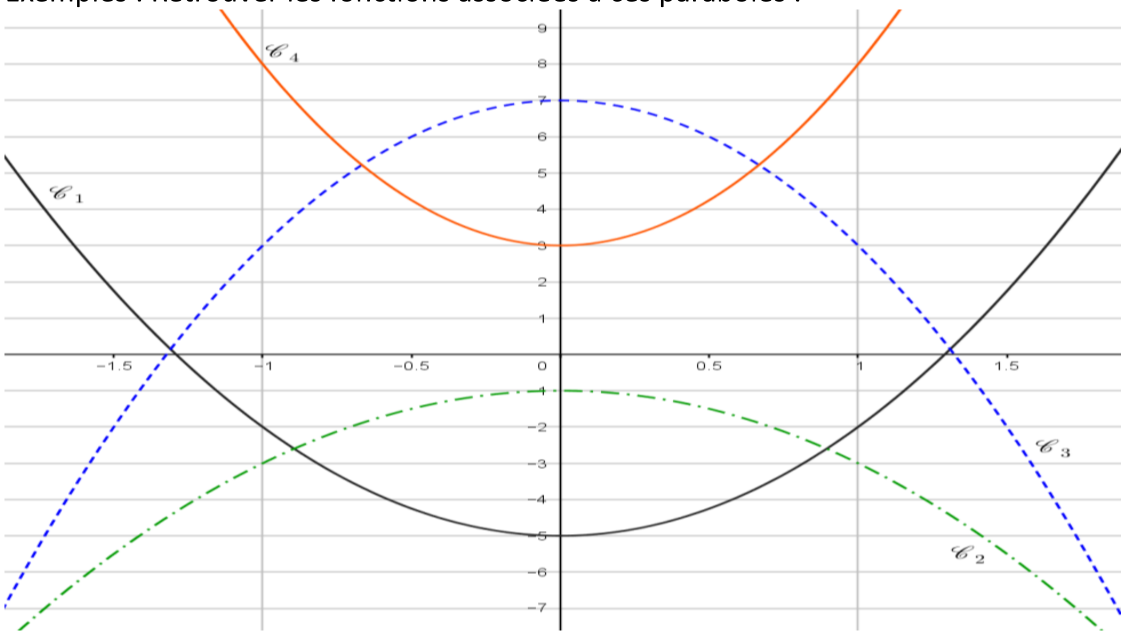
x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g	$\nearrow$	b	$\searrow$

La parabole est tournée vers le bas.
La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

c) Associer une courbe à une fonction du type $g(x) = a\,x^2 + b$:

La courbe doit être une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
L'ordonnée du sommet est égale à b.
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, aest négatif.
g(1) = a + b donc il suffit de lire la valeur de g(1) pour trouver a.

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



Pour C_1 le sommet est S (0 ; – 5) donc **b = – 5**. Elle passe par A(1 ; – 2) donc $f_1(1) = -2$
or $f_1(1) = a + b = a - 5$ donc $a - 5 = -2 \Leftrightarrow$ **a = 3** donc $\boldsymbol{f_1(x) = 3x^2 - 5}$.
Pour C_2 le sommet est S (0 ; – 1) donc **b = – 1**. Elle passe par A(1 ; – 3) donc $f_2(1) = -3$
or $f_2(1) = a + b = a - 1$ donc $a - 1 = -3 \Leftrightarrow$ **a = – 2** donc $\boldsymbol{f_2(x) = -2x^2 - 1}$.
Pour C_3 le sommet est S (0 ; 7) donc **b = 7**. Elle passe par A(1 ; 3) donc $f_3(1) = 3$
or $f_3(1) = a + b = a + 7$ donc $a + 7 = 3 \Leftrightarrow$ **a = – 4** donc $\boldsymbol{f_3(x) = -4x^2 + 7}$.
Pour C_4 le sommet est S (0 ; 3) donc **b = 3**. Elle passe par A(1 ; 8) donc $f_4(1) = 8$
or $f_4(1) = a + b = a + 3$ donc $a + 3 = 8 \Leftrightarrow$ **a = 5** donc $\boldsymbol{f_4(x) = 5x^2 + 3}$.

4) Les fonctions du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) Quelques exemples :

Pour chacune des fonctions suivantes:

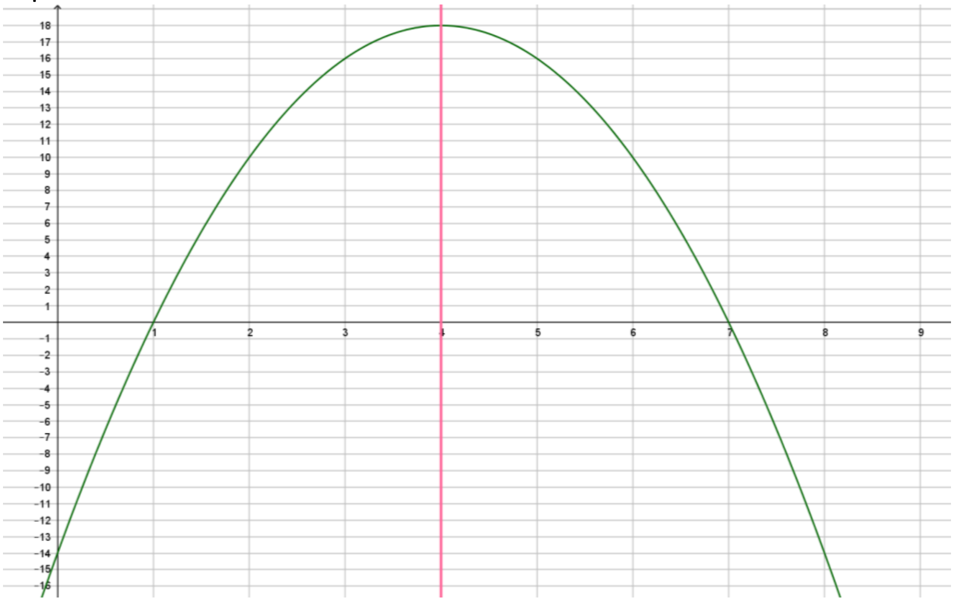
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations et le tableau de signes.

➢ $h(x) = -2(x - 7)(x - 1)$

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(x)$	-14	0	10	16	18	16	10	0	-14

Courbe représentative :



Axe de symétrie : la droite verticale d'équation $x = 4$

Coordonnées du sommet : S (4 ; 18)

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = 1$ et $x = 7$

Intersections avec l'axe des ordonnées : $y = -14$

➢ Forme développée : $-2(x - 7)(x - 1) = -2(x^2 - x - 7x + 7) = -2x^2 + 16x - 14$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
variations de h		↗	18	↘	

Tableau de signes :

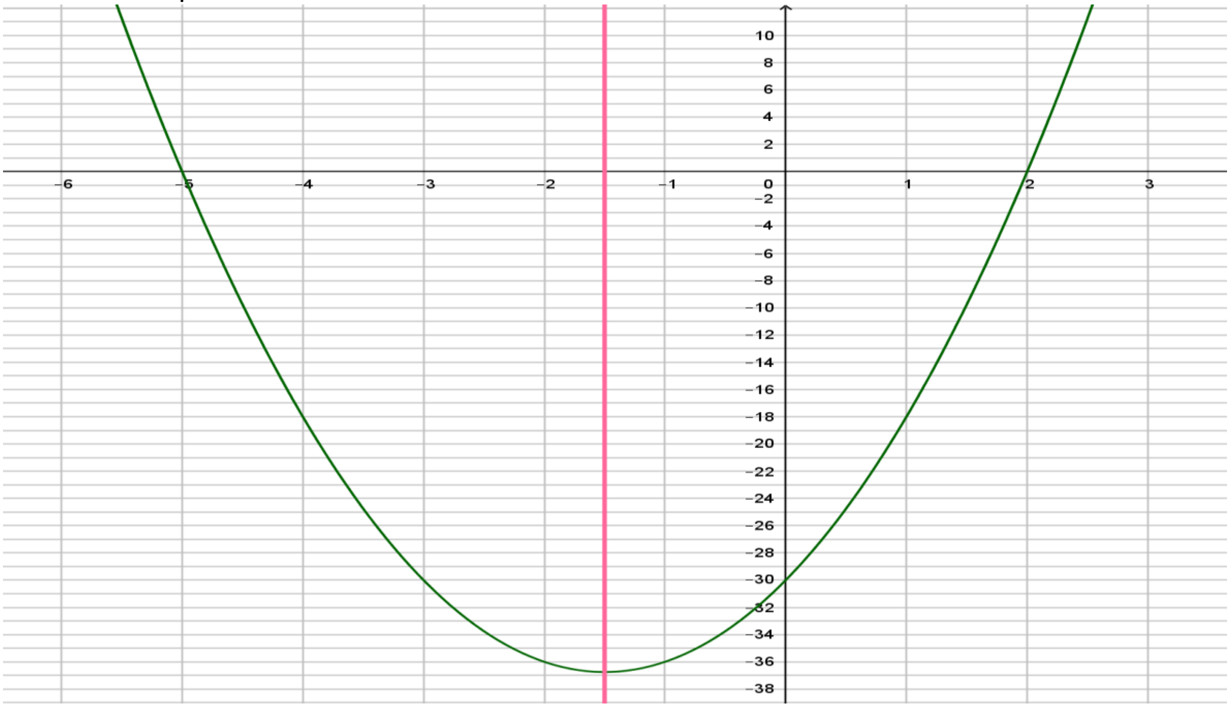
x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
signes de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

➢ $\mathbf{h}(x) = 3\,(x-2)\,(x+5) = 3\,(x-2)\,(x-(-5))$

Tableau de valeurs :

x	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
h(x)	24	0	− 18	− 30	− 36	− 36	− 30	− 18	0	24

Courbe représentative :



Axe de symétrie : la droite verticale d'équation $x = -1{,}5$

Coordonnées du sommet : S (− 1,5 ; − 36,75)

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = 2$ et $x = -5$

Intersections avec l'axe des ordonnées : y = − 30

➢ Forme développée : $3\,(x-2)\,(x+5) = 3\,(x^2 + 5x - 2x - 10) = 3x^2 + 9x - 30$

Tableau de variations :

x	− ∞		− 1,5		+ ∞
variations de h		↘	− 36,75	↗	

Tableau de signes :

x	− ∞		− 5		2		+ ∞
signes de h(x)		+	0	−	0	+	

b) <u>A retenir</u> :

$h(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

- h est une fonction définie sur IR.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
  En effet $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ est la forme factorisée d'un polynôme de degré 2.
  ATTENTION : Tous les polynômes de degré 2 ne sont pas factorisables.
  Pour ceux qui ne seront pas factorisables, la courbe ne coupera pas l'axe des abscisses.
- h est représentée par une parabole, tournée vers le haut si a est positif, tournée vers le bas si a est négatif, et dont l'axe de symétrie est l'axe vertical passant par le milieu de x_1 et x_2 .
- Le sens de variation de h dépend du signe de a.

Si a > 0

x	$-\infty$		$\dfrac{x_1 + x_2}{2}$		$+\infty$
variations de h		↘		↗	

La parabole est tournée vers le haut.
La fonction h admet un minimum atteint en $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Si a < 0

x	$-\infty$		$\dfrac{x_1 + x_2}{2}$		$+\infty$
variations de h		↗		↘	

La parabole est tournée vers le bas.
La fonction h admet un minimum atteint en $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

- La parabole coupe l'axe des ordonnées en $x = x_1$ et en $x = x_2$.
  En effet, pour déterminer les intersections d'une courbe avec l'axe des abscisses, on cherche les antécédents de 0 par la fonction donc on résoud l'équation $h(x) = 0$.
  Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$
  $\Leftrightarrow$ pas possible $\quad x = x_1$ ou $x = x_2$
  Donc 0 a deux antécédents par h : $x = x_1$ et $x = x_2$.
  x_1 et x_2 sont les deux valeurs qui annulent h, on dit que ce sont les **racines** de $h(x)$.

- <u>Signe de $h(x)$:</u>

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signes de h		+ signe de a	0	− signe de − a	0	+ signe de a	

Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signes de h		− signe de a	0	+ signe de − a	0	− signe de a	

- **CAS PARTICULIER : $x_1 = x_2$**

  Alors $h(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_1) = h(x) = a\,(x - x_1)^2$.

  La courbe de la fonction h ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point d'abscisse x_1 .

  <u>Signe de $h(x)$:</u>

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
signes de h		+ signe de a	0	+ signe de a	

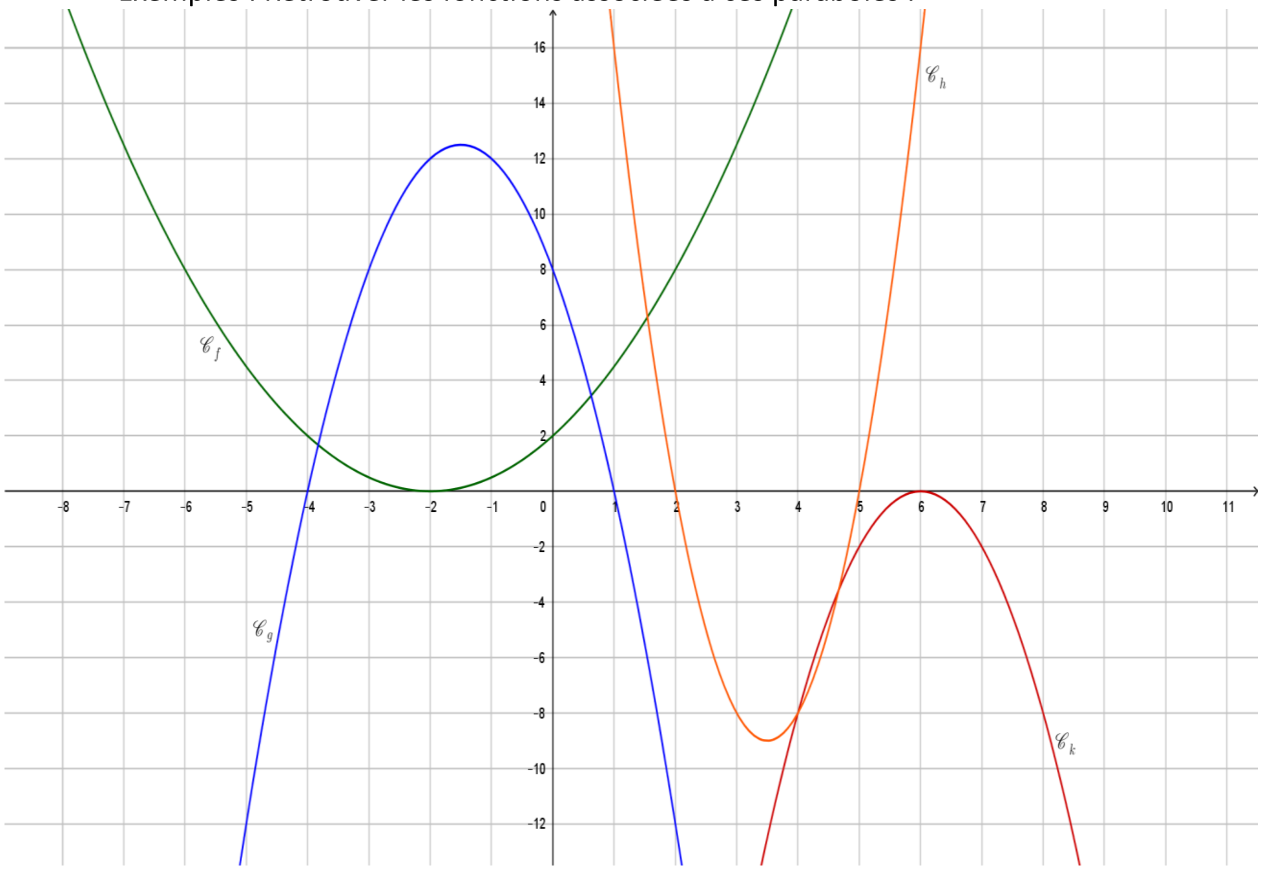
Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
signes de h		− signe de a	0	− signe de a	

c) Associer une courbe à une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

La courbe doit couper l'axe des abscisses en deux points ce qui permet de trouver x_1 et x_2 .
Si la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point alors on a $x_1 = x_2$.
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, a est négatif.
Pour trouver a, on choisit un point de la courbe.
Par exemple $M(x_M ; y_M)$ et on écrit que $h(x_M) = y_M$.
Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation pour trouver a .

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



La courbe C_f coupe une seule fois l'axe des abscisses en $x = -2$ donc $x_1 = x_2 = -2$
donc $f(x) = a(x+2)^2$. De plus C_f passe par le point M (0 ; 2) donc $f(0) = 2$
$f(0) = a \times 2^2 = 4a$ donc $4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$

La courbe C_g coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1 = -4$ et en $x_2 = 1$
donc $g(x) = a(x+4)(x-1)$. De plus C_g passe par le point M (0 ; 8) donc $g(0) = 8$
$g(0) = a \times 4 \times (-1) = -4a$ donc $-4a = 8 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{4} = -2$ donc $g(x) = -2(x+4)(x-1)$

La courbe C_h coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1 = 2$ et en $x_2 = 5$
donc $h(x) = a(x-2)(x-5)$. De plus C_h passe par le point M (3 ; – 8) donc $h(3) = -8$
$h(3) = a \times 1 \times (-2) = -2a$ donc $-2a = -8 \Leftrightarrow a = \frac{8}{2} = 4$ donc $h(x) = 4(x-2)(x-5)$

La courbe C_k coupe une seule fois l'axe des abscisses en $x = 6$ donc $x_1 = x_2 = 6$
donc $k(x) = a(x-6)^2$. De plus C_k passe par le point M (4 ; – 8) donc $k(4) = -8$
$k(4) = a \times (-2)^2 = 4a$ donc $4a = -8 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{4} = -2$ donc $k(x) = -2(x-6)^2$

d) Déterminer le signe d'une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Il faudra faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de a		signe de a		signe de a		signe de a	
signe de $x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $h(x)$		signe de a	0	signe de $-$ a	0	signe de a	

Exemples :

- Déterminer le signe de $h(x) = 5(x + 4)(x - 1)$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de a= 5		$+$		$+$		$+$	
signe de $x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $h(x)$ est positif sur $]-\infty ; -4[\cup]1 ; +\infty[$

$h(x)$ est nul en $x = -4$ et $x = 1$

$h(x)$ est négatif sur $]-4; 1[$

- Déterminer le signe de $h(x) = -3(x + 5)^2$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
signe de a = -3		$-$		$-$	
signe de $(x + 5)^2$		$+$		$+$	
signe de $h(x)$		$-$		$-$	

Donc $h(x)$ est négatif sur $]-\infty ; -5[\cup]-5 ; +\infty[$

$h(x)$ est nul en $x = -5$

e) <u>Factoriser un polynôme de degré 2 si on connait une racine x_1 :</u>

Si $f(x) = a x^2 + b x + c$ et que $f(x_1) = 0$ alors f est factorisable et peut s'écrire :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On remplace a et x_1 par leur valeur respective, on développe et on égalise les coefficients des termes de même degré. On appelle cette technique, **l'identification des polynômes**.

Exemple : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$. Une racine de ce polynôme est $x = -4$.
Factoriser f .
-4 est une racine donc $x_1 = -4$
f peut alors s'écrire $f(x) = 3(x + 4)(x - x_2)$
On développe $f(x)$.
$3(x + 4)(x - x_2)$
$= 3(x^2 - x_2 \times x + 4x - 4x_2)$
$= 3x^2 - 3x_2 \times x + 12x - 12x_2$

On a $f(x) = 3x^2 + (-3x_2 + 12) \times x + (-12x_2)$

Or $f(x) = 3 \ x^2 + \quad 9 \quad \times x + (-12)$

On égalise les coefficients des termes de même degré

$-3x_2 + 12 = 9$ et $-12x_2 = -12$

La dernière équation permet de trouver $x_2 = 1$

On peut alors vérifier rapidement que cette valeur vérifie la première équation.

Il ne reste plus qu'à écrire la forme factorisée de f en remplaçant a, x_1 et x_2

par leur valeur respective.

$f(x) = 3(x + 4)(x - 1)$

Exercice : Factoriser $g(x) = -x^2 + 2x + 15$ sachant que 5 est une racine de $g(x)$.

5 est une racine donc $x_1 = 5$
g peut alors s'écrire $g(x) = -1(x - 5)(x - x_2)$
On développe $g(x)$.
$-1(x - 5)(x - x_2)$
$= -1(x^2 - x_2 \times x - 5x + 5x_2)$
$= -x^2 + x_2 \times x + 5x - 5x_2$

On a $g(x) = -x^2 + (x_2 + 5) \times x + (-5x_2)$

Or $g(x) = - \ x^2 + \ 2 \ \times x + 15$

On égalise les coefficients des termes de même degré

$x_2 + 5 = 2$ et $-5x_2 = 15 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{15}{5} = -3$

On peut alors vérifier rapidement que cette valeur vérifie la première équation.

Donc $g(x) = -1(x - 5)(x + 3)$