ASIE Sujet 2 Juin 2024

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

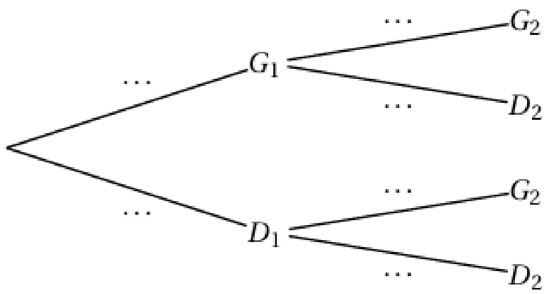
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

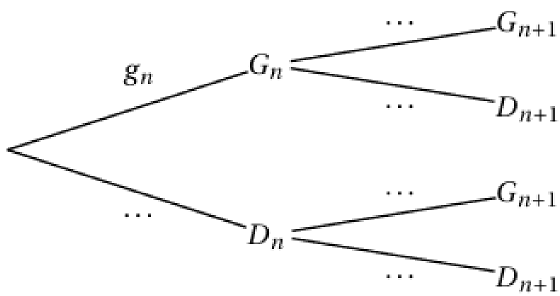
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while . . . :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = . . .
7      return (n)
```

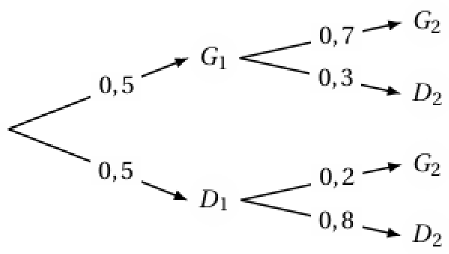
CORRECTION

ASIE Sujet 2 Juin 2024

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

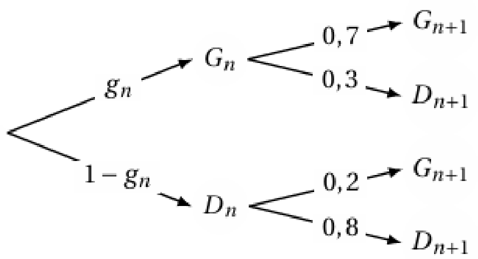
2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. **a.** On a l'arbre suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1-g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

5. **a.** Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$

Or pour tout entier naturel n non nul $\quad g_n = v_n + 0,4 \quad$ donc $\quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Il faut résoudre $g_n - 0,4 \leq 0,001$ donc $0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001$ donc $v_n \leq 0,001$
D'après la calculette, $v_7 \approx 0,0016$ et $v_8 \approx 0,00078$
donc c'est à partir de $n = 8$ que l'on aura $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

POLYNESIE 5 Mai 2022

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque.
Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait »;
- D : « le casque présente un défaut de conception »;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0{,}036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait?

Partie 2

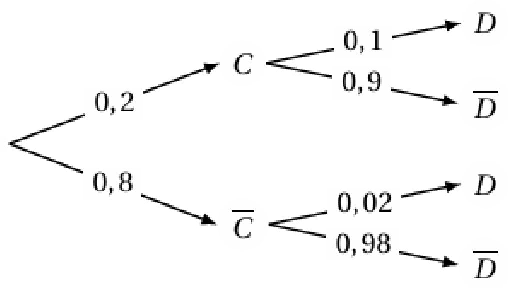
On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0{,}036$.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99?

CORRECTION POLYNESIE 5 Mai 2022

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



1. $\mathrm{P}(C \cap D) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

La probabilité d'avoir un casque contrefait présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(C \cap D) + \mathrm{P}\left(\overline{C} \cap D\right)\\ &= 0,02 + 0,8 \times 0,02\\ &= 1,8 \times 0,02\\ &= 0,036\end{aligned}$$

La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $\mathrm{P}_D(C)$

$\mathrm{P}_D(C) = \dfrac{\mathrm{P}(C \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1. **a.**
   - On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0,036$. (d'après la question **2.** de la **partie 1**) ;
   - On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
   - La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

   Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(35 ; 0,036)$

   b. On veut calculer $\mathrm{P}(X = 1)$.

   $\mathrm{P}(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

   c. Calculons : $\mathrm{P}(X \leqslant 1) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (à la calculatrice).

2. Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n ; 0,036)$.

   Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :

   $\mathrm{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

   Il faut donc résoudre $1 - 0,964^n \geq 0,99 \Leftrightarrow -0,964^n \geq -0,01 \Leftrightarrow 0,964^n \leq 0,01$
   Grâce à la calculette, on a pour n = 125 $0,964^{125} \approx 0,0102$ et pour n = 126 $0,964^{126} \approx 0,0098$
   donc les solutions sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 126.

   Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.