

**Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.**

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

**Partie A**

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

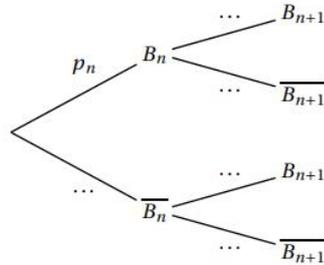
On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.

Soit  $n$  un entier naturel.

On note  $B_n$  l'évènement « la trottinette est en bon état  $n$  semaines après sa mise en service » et  $p_n$  la probabilité de  $B_n$ .

Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc  $p_0 = 1$ .

1. Donner  $p_1$  et montrer que  $p_2 = 0,85$ .  
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$ .
4.
  - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n \geq 0,8$ .
  - b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc?
5.
  - a. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = p_n - 0,8$ . Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
  - b. En déduire l'expression de  $u_n$  puis de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire la limite de la suite  $(p_n)$ .

**Partie B**

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

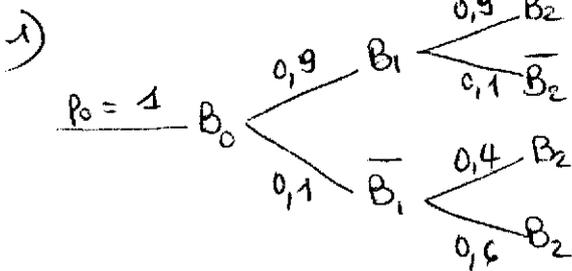
- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.

Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

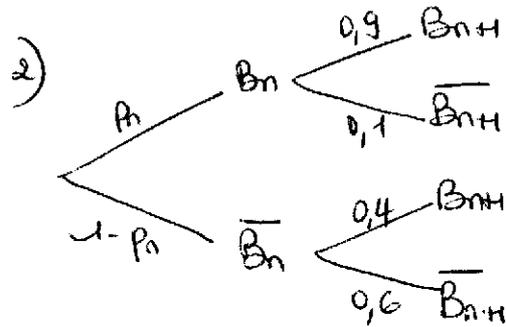
1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que  $E(X) = 12$ . Interpréter le résultat.

# Correction



$$P_1 = P(B_1) = 0,9$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\bar{B}_1) \times P_{\bar{B}_1}(B_2) \\ &= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 \\ &= 0,81 + 0,04 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$



3)  $P_{n+1} = P(B_{n+1})$

$$\begin{aligned} &= P(B_n \cap B_{n+1}) + P(\bar{B}_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\bar{B}_n) \times P_{\bar{B}_n}(B_{n+1}) \\ &= P_n \times 0,9 + (1 - P_n) \times 0,4 \\ &= 0,9P_n + 0,4 - 0,4P_n \\ &= 0,5P_n + 0,4 \end{aligned}$$

4)  $P_n: "P_n \geq 0,8"$  pour tout entier naturel  $n$ .

Initialisation:  $n=0$   $P_0=1$  et  $1 \geq 0,8$  donc  $P_0$  est vérifiée.

Hérédité: Supposons qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $P_k$  soit vérifiée c'est-à-dire que  $P_k \geq 0,8$ .

Démontrons qu'alors  $P_{k+1}$  est vraie c'est-à-dire que  $P_{k+1} \geq 0,8$ .

$$P_k \geq 0,8 \Leftrightarrow 0,5P_k \geq 0,8 \times 0,5 \text{ car } 0,5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5P_k + 0,4 \geq 0,4 + 0,4$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} \geq 0,8 \text{ donc } P_{k+1} \text{ est vérifiée.}$$

Conclusion:

$P_0$  est vraie,  $P_n$  est héréditaire donc  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

b) Tous les lundis, au moins 80% des bobinettes sont en bon état.

5) a)  $u_n = P_n - 0,8 \Leftrightarrow P_n = u_n + 0,8$

$$u_{n+1} = P_{n+1} - 0,8 = 0,5P_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(u_n + 0,8) - 0,4 = 0,5u_n + 0,4 - 0,4 = 0,5u_n$$

donc  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q=0,5$  et de premier terme  $u_0 = P_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

b)  $u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$  et  $P_n = u_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$

c)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} 0,5^n = 0 \\ \text{car } -1 < 0,5 < 1 \end{array} \right\} \text{ par produit}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} 0,2 = 0,2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 0,8 = 0,8 \end{array} \right\} \text{ par somme}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0,8$$

### Partie B :

1) On effectue 15 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes donc  $n = 15$ .

On appelle succès l'événement "la bobinette est en bon état"

$$P(S) = p = 0,8$$

$X$  est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

$X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 15$  et  $p = 0,8$

$$2) P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,8^{15} \times 0,2^0 = 0,8^{15} \approx 0,035$$

$$3) P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,939$$

$$4) E(X) = 12 \quad (n \times p = 15 \times 0,8 = 12)$$

En moyenne, le lundi, sur 15 bobinettes, 12 sont en bon état.