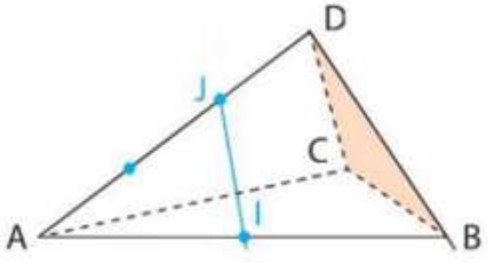
Fiche d'exercices 2 Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : Intersection de deux droites dans l'espace

ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [AB] et J le point de l'arête [AD] tel que

$AJ = \frac{2}{3}AD$.

Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD)

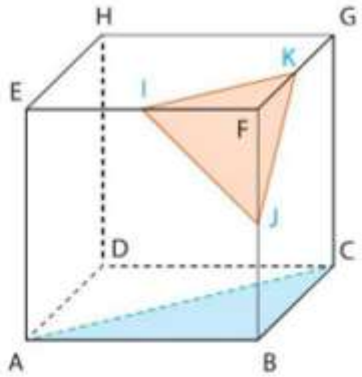


Exercice 2 : Intersection de deux plans dans l'espace

ABCDEFGH est un cube.

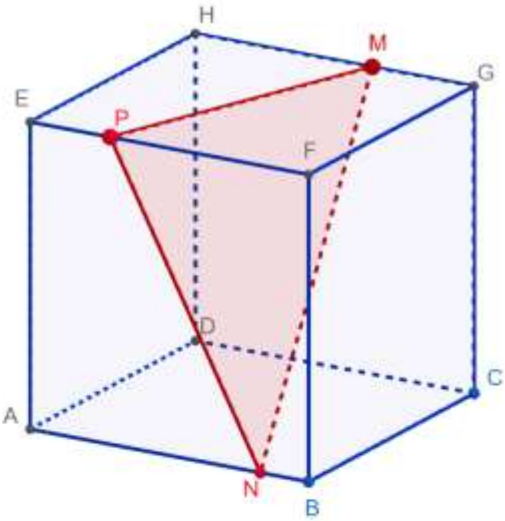
Les points I, J, K sont es milieux respectifs des arêtes [EF] , [FB]et [GF].

Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).



Exercice 3 : Intersection d'un plan et d'un cube

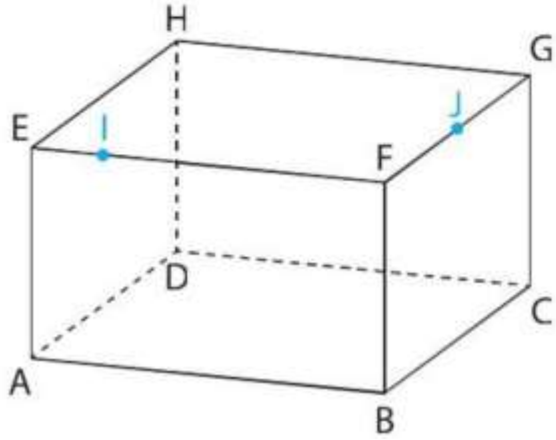
Construire l'intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH.



Exercice 4 : Intersection d’un plan et d’un parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (ou pavé droit).

I est le point de [EF] tel que EI = $\frac{1}{5}$EF. J est le milieu de [FG].

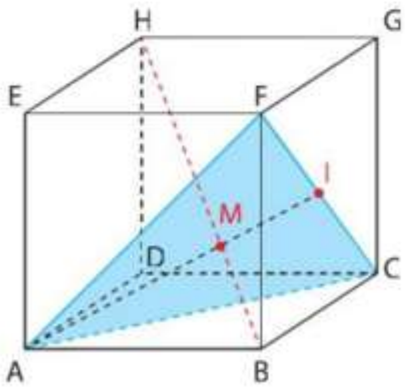


1. Tracer l’intersection des plans (AIJ) et (ABC).
2. Tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ). Quelle est la nature du polygone obtenu ?

Exercice 5 : problème d’alignement

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu de [FC].

Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$.



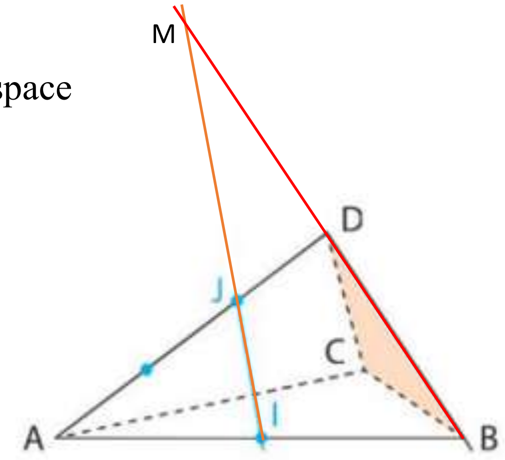
Montrer que les points M, B et H sont alignés.

¤ Première méthode : on se placera dans un repère judicieux de l’espace (repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$)

¤ Deuxième méthode : on fera une démonstration vectorielle (Chasles sera notre ami !)

CORRECTION

Exercice 1 : Intersection de deux droites dans l'espace



ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [AB] et J le point de l'arête [AD] tel que

$AJ = \frac{2}{3}AD$.

Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD) .

L'intersection d'un plan et d'une droite est un point. Il faut donc trouver ce point.

Les droites (BD) et (IJ) sont coplanaires car les 4 points B,D,I et J sont dans le plan (ABD).

De plus $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$ donc d'après la contraposée du théorème de Thales, les droites (IJ) et (BD) ne sont pas parallèles. Donc elles sont sécantes. Posons M leur point d'intersection.

M est sur la droite (IJ) et sur la droite (BD) donc il appartient à l'intersection de (IJ) et du plan (BCD).

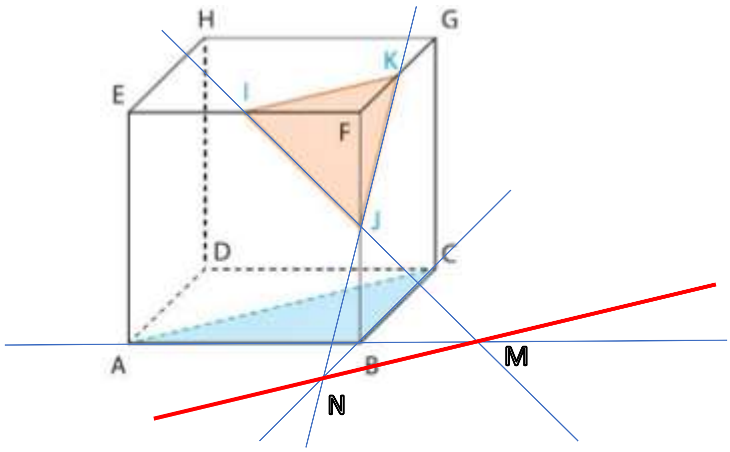
M est le point cherché.

Exercice 2 : Intersection de deux plans dans l'espace

ABCDEFGH est un cube.

Les points I, J, K sont es milieux respectifs des arêtes [EF] , [FB]et [GF].

Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).



L'intersection de deux plans est une droite. Il faut donc trouver deux points.

Les points A,B,I et J sont dans le même plan (ABF) et (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles de manière évidente donc elles sont sécantes. Posons M leur point d'intersection.

$M \in (IJ)$ et $M \in (AB)$ donc M appartient à l'intersection des plans (IJK) et (ABC). C'est un des deux points cherchés.

De même les droites (BC) et (KJ) sont coplanaires et non parallèles donc sécantes. Posons N leur point d'intersection.

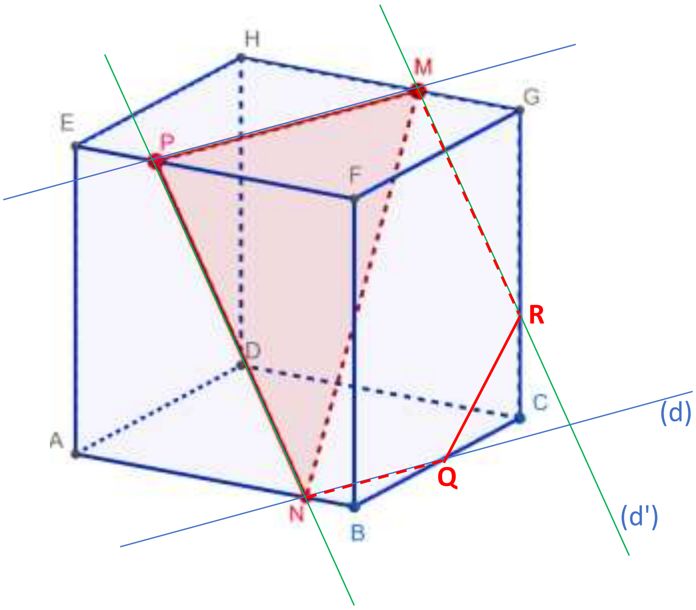
$N \in (JK)$ et $N \in (BC)$ donc N appartient à l'intersection des plans (IJK) et (ABC). C'est le second point cherché.

La droite d'intersection des plans (IJK) et (ABC) est donc la droite (MN).

Exercice 3 : Intersection d’un plan et d’un cube

Construire l’intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH.

Pour trouver l'intersection d'un plan et d'un cube, il faut déterminer l'intersection du plan avec toutes les faces du cube. C'est ce que l'on appelle aussi déterminer la section du cube par le plan.



P et M sont deux points des plans (MNP) et (EFG). Le segment [PM] fait donc partie de la section cherchée.

De même avec la droite (PN), intersection de (MNP) et (ABF).
Le segment [PN] fait donc partie de la section cherchée.

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles de manière évidente.
Le plan (PMN) coupe (EFG) en (PM). Il coupe donc le plan (ABC) en une droite (d) parallèle à (PM) et qui passe par N, point d'intersection de (ABC) avec (PN). Cette droite (d) coupe (BC) en Q.
Le segment [NQ] fait donc partie de la section. Il sera en pointillé car non visible.

Les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles de manière évidente.
Le plan (PMN) coupe (ABF) en (PN). Il coupe donc le plan (DCG) en une droite (d') parallèle à (PN) et qui passe par M, point d'intersection de (DCG) avec (PM). Cette droite (d') coupe (CG) en R.
Le segment [MR] fait donc partie de la section. Il sera en pointillé car non visible.

Les points Q et R sont deux points des plans (MNP) et (BCG). Le segment [QR] fait donc partie de la section. Il sera en trait plein car visible.

L’intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH est donc le polygone MPNQR.

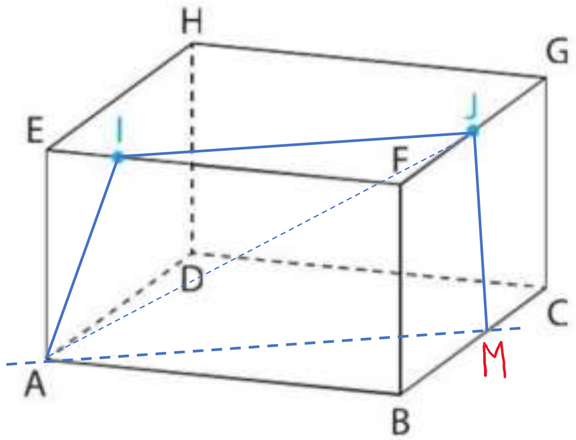
<u>Exercice 4</u> : Intersection d’un plan et d’un parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (ou pavé droit).

I est le point de [EF) tel que EI = $\frac{1}{5}$ EF.

J est le milieu de [FG].

1)Tracer l’intersection des plans (AIJ) et (ABC).



L'intersection de deux plans est une droite.
Il faut donc trouver deux points.

Le point A fait partie des deux plans (ABC) et (AIJ) de manière évidente. C'est donc le premier point cherché.
Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles et le plan (IJA) coupe (EFG) en (IJ). Il coupe donc (ABC) en une droite (d) parallèle à (IJ) passant par A. Cette droite est donc la droite d'intersection de (ABC) avec (AIJ). C'est la droite cherchée.

2) Tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ). Quelle est la nature du polygone obtenu ?

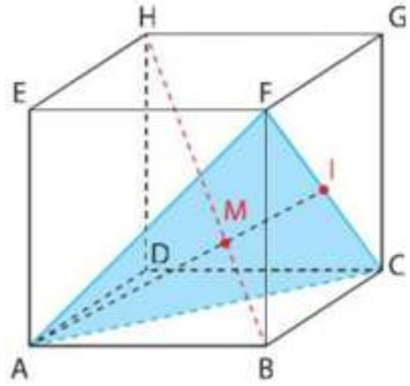
La droite (d) coupe (BC) en M. Le segment [AM] et le segment [JM] font donc partie de la section.
La section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ) est donc le parallélogramme IAMJ.

<u>Exercice 5</u> : problème d'alignement

Soit ABCDEFGH un cube et I le milieu de [FC].

Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Montrer que les points M, B et H sont alignés.



¤ Première méthode : on se placera dans un repère judicieux de l'espace (repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$)

A (0 ; 0 ; 0) ; B (1 ; 0 ; 0) , D (0 ; 1 ; 0) ; E (0 ; 0 ; 1)

C (1 ; 1 ; 0) , F (1 ; 0 ; 1) , G (1 ; 1 ; 1) , H (0 ; 1 ; 1)

I milieu de [FC] donc $I(1 ; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $M(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

$\overrightarrow{MB}(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{MH}(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

On a donc $\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{MB}$ donc $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires donc les points M , B et H sont alignés.

¤ Deuxième méthode : on fera une démonstration vectorielle (Chasles sera notre ami !)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{HB} &= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\
&= \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IB} + 2\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} \\
&= \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{FI} + 2\,(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{MB} \\
&= \overrightarrow{0} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \\
&= 3\,\overrightarrow{MB}
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires donc les points M , H et B sont alignés.