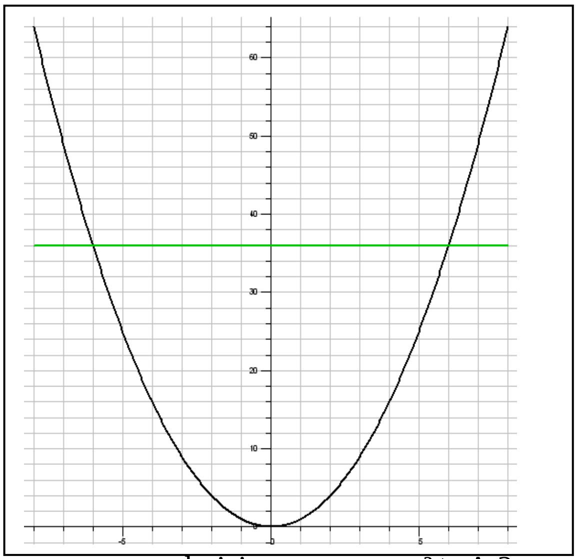
Chapitre 6 **COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES**
LIMITES D'UNE FONCTION

Afin d'étudier de manière plus complète le comportement global d'une fonction, on est amené à se prononcer sur les évolutions des valeurs de cette fonction lorsque la variable se rapproche des bords de l'intervalle de définition.

I. Observation des fonctions de référence :



1) Fonctions puissance : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

a) La fonction carré : $x \longmapsto x^2$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

Résoudre $x^2 \geq 36$ et interpréter graphiquement le résultat

$x^2 \geq 36 \Leftrightarrow x \leq -6$ ou $x \geq 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.
Graphiquement , les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au-dessus ou sur la droite horizontale d'équation $y = 36$.
On lit $S =]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.

Résoudre $x^2 \geq 10^4$. $S =]-\infty\,;-10^2] \cup [10^2\,;+\infty[$

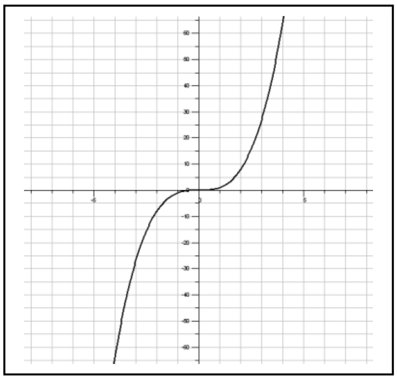
Résoudre $x^2 \geq 10^{40}$. $S =]-\infty\,;-10^{20}] \cup [10^{20}\,;+\infty[$

De façon générale, si A est un réel positif aussi grand que l'on veut, comment choisir x pour que $x^2 \geq A$?
$x \in]-\infty\,;-\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}\,;+\infty[$. Pour que x^2 soit supérieur à A , nombre positif aussi grand que l'on veut , il faut que x soit très grand ou très petit.

Quand x devient aussi grand que l'on veut , on dit que x tend vers $+\infty$ et on note $x \longrightarrow +\infty$.
Quand x devient aussi petit que l'on veut , on dit que x tend vers $-\infty$ et on note $x \longrightarrow -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

b) La fonction cube : $x \longmapsto x^3$



$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

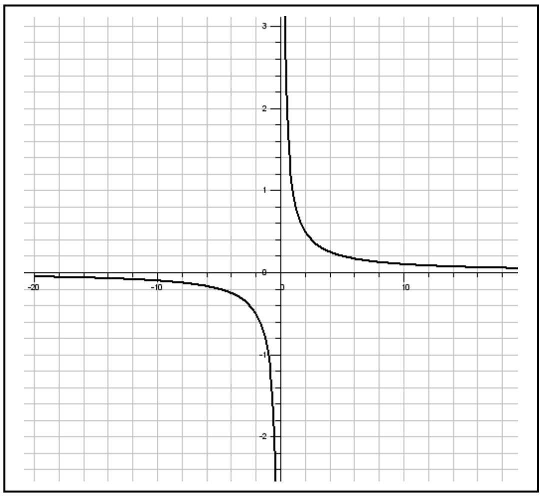
Quand x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

c) Généralisation : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

Si n est pair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^2.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

Si n est impair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^3.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.



2) Fonctions inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Calculer f(10) ; f (100) ; f (10^6).

$f(10) = \frac{1}{10} = 10^{-1}$; $f(100) = \frac{1}{100} = 10^{-2}$; $f(10^6) = 10^{-6}$

Quand x devient grand , $\frac{1}{x}$ devient petit , il se rapproche de 0.

Résoudre $\frac{1}{x} \leq 10^{-5}$:

$\frac{1}{x} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow x \geq 10^5$ *car la fonction inverse est décroissante donc elle perturbe l'ordre.*

De façon générale, si A est un réel positif aussi petit que l'on veut, comment choisir x pour que $\frac{1}{x} \leq$ A ?

$\frac{1}{x} \leq A \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{A}$ Si A est aussi petit que l'on veut en restant positif , $\frac{1}{A}$ est aussi grand que l'on veut .

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, en restant positif. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.

De même, quand x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, en restant négatif. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$.

Que se passe-t-il quand x se rapproche de 0 ?

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant positif , $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut.

  On notera $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant négatif , $\frac{1}{x}$ devient aussi petit que l'on veut.

  On notera $\lim\limits_{x \to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty$

II. Limite d'une fonction en l'infini :

1) Limite infinie en l'infini :

a) Définition :

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand.
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] $-\infty$; A [avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme] $-\infty$; A [avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction carré :

¤ Pour la limite en $+\infty$:

On choisit un réel A aussi grand que l'on veut. On cherche alors $x > 0$ tel que $f(x) > A$.

$$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A} \quad \text{si } x > 0$$

donc si $x > \sqrt{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

¤Pour la limite en $-\infty$:

On choisit un réel A aussi grand que l'on veut. On cherche alors $x < 0$ tel que $f(x) > A$.

$$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x < -\sqrt{A} \quad \text{si } x < 0$$

donc si $x < -\sqrt{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

.

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

n est un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

2) **Limite finie ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ en l'infini** :

a) Définition :

Dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit. On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

¤Pour la limite en $+\infty$:

On choisit un intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ avec α un réel positif. On cherche alors $x > 0$ tel que $-\alpha < f(x) < \alpha$.

$$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \alpha \quad \text{donc} \quad x > \frac{1}{\alpha}$$

donc si $x > \frac{1}{\alpha}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

¤Pour la limite en $-\infty$:

On choisit un intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ avec α un réel positif. On cherche alors $x < 0$ tel que $-\alpha < f(x) < \alpha$.

$$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{x} < 0 \quad \text{donc} \quad x < -\frac{1}{\alpha}$$

donc si $x < -\frac{1}{\alpha}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$

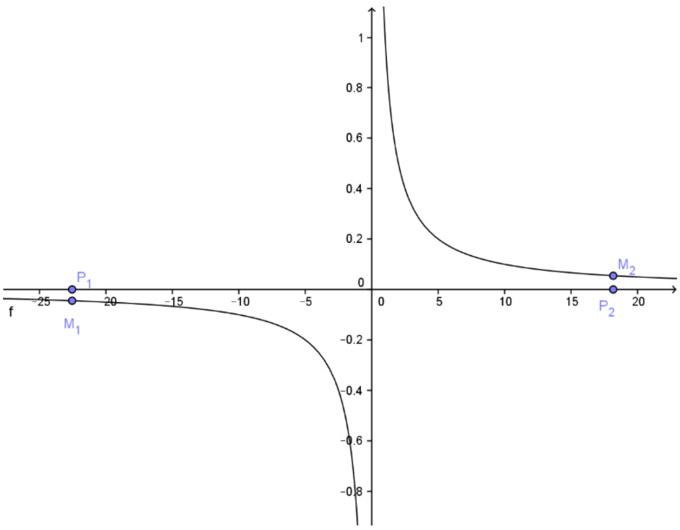
d) Conséquences graphiques :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Cela signifie que si un point M (x ; $f(x)$) appartient à la courbe représentative de f et si P(x ; ℓ) est un point de la droite $y = \ell$ alors la distance MP tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple avec la fonction inverse :



Méthode: Pour étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote d'équation $y = \ell$, on étudie le signe de la différence $f(x) - \ell$.

Si $f(x) - \ell > 0$ la courbe sera au-dessus de l'asymptote.

Si $f(x) - \ell < 0$ la courbe sera au-dessous de l'asymptote.

Pour la fonction inverse, l'asymptote est $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x) - 0 = \dfrac{1}{x}$.

Si $x > 0$ $f(x) - 0 > 0$ donc la courbe est au–dessus de l'asymptote sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Si $x < 0$ $f(x) - 0 < 0$ donc la courbe est au–dessous de l'asymptote sur $]-\infty\,;0\,[$

III. Limite d'une fonction en une valeur finie a :

1) La valeur finie a est aux extrémités et à l'extérieur du domaine de définition (valeur interdite) :

a) Définition :

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à droite en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]-\infty\,;A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = -\infty$.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à gauche en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]-\infty\,;A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = -\infty$.

b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

- Pour la limite en 0 par valeurs supérieures :

  On choisit un intervalle $]A\,;+\infty[$ avec A un réel positif.
  On cherche alors $x > 0$ tel que $f(x) > A$.

  $f(x) > A \iff \dfrac{1}{x} > A$ donc $x < \dfrac{1}{A}$

  donc si $0 < x < \dfrac{1}{A}$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A\,;+\infty[$

  donc $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- Pour la limite en 0 par valeurs inférieures :

  On choisit un intervalle $]-\infty\,;A[$ avec A un réel négatif.
  On cherche alors $x < 0$ tel que $f(x) < A$.

  $f(x) < A \iff \dfrac{1}{x} < A$ donc $0 > x > \dfrac{1}{A}$

  donc si $\dfrac{1}{A} < x < 0$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty\,;A[$

  donc $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

c) Limites de référence :

$\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

si $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ si n est impair

$\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair

d) Conséquences graphiques :

Si $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (à droite ou à gauche) on dira que la droite verticale d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a.

2) La valeur finie a est à l'intérieur du domaine de définition :

Dans ce cas, la recherche d'une limite est dénuée de tout intérêt.
Si a est une valeur du domaine de définition, on posera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

IV. Opérations sur les limites :

Pour calculer une limite d'une fonction, on peut utiliser les définitions (avec les intervalles), mais c'est long et peu pratique ; donc on préfère utiliser les limites des fonctions de référence, les opérations à partir de ces fonctions de référence et les techniques de comparaison
a représente soit un réel , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1) Somme de deux fonctions :

$\lim_{x\to a} f(x) =$ \ $\lim_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$	**F.I**	$+\infty$

2) Produit de deux fonctions :

$\lim_{x\to a} f(x) =$ \ $\lim_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	0
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**
0	0	**F.I**	**F.I**	0

3) Inverse d'une fonction :

$\lim_{x\to a} f(x) =$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$ si $f(x) > 0$ $-\infty$ si $f(x) < 0$

4) Quotient de deux fonctions : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

$\lim_{x\to a} f(x) =$ \ $\lim_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^- si $\ell > 0$ 0^+ si $\ell < 0$	0^+ si $\ell > 0$ 0^- si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) > 0$ $+\infty$ si $g(x) < 0$
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) < 0$ $+\infty$ si $g(x) > 0$
0	0	0	0	**F.I**

5) Formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

6) Limites d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$:

Pour lever une indétermination, on factorise le terme de plus haut degré.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$

$$5x^3 - 2x^2 + 4 = 5x^3\left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{5x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{5x^3} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{5x} + \dfrac{4}{5x^3} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$

Par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3\left(1 - \dfrac{2}{5x} + \dfrac{4}{5x^3}\right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{2}{5x} + \dfrac{4}{5x^3} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

Par produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3\left(1 - \dfrac{2}{5x} + \dfrac{4}{5x^3}\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = -\infty$

Théorème : La limite d'une fonction polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.

Rédaction : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

7) Limite d'une fonction rationnelle :

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5}$ pour $x \neq -\dfrac{5}{4}$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = \frac{2x\left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}\right)}{2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right)} = \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{2x} = 0$

Par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{5}{2x} = 2$

Par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = +\infty$

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$ pour $x \in D_f$ (à déterminer)

Domaine de définition : $2x^2 - 3x + 1 \neq 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = 1 \ ; \ x_2 = \dfrac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{ 1 \ ; \dfrac{1}{2} \}$

$$\frac{4x + 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{2x\,(2 + \dfrac{1}{2x})}{2x\,(x - \dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{2x})} = \frac{2 + \dfrac{1}{2x}}{x - \dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{2x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \dfrac{1}{2x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x - \dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{2x} = -\infty \end{array}\right\}$$

Par quotient

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x + 1}{2x^2 - 3x + 1} = 0$$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 2x}{x + 4}$ pour $x \neq -4$

$$\frac{5x^3 - 2x}{x + 4} = \frac{x\,(5x^2 - 2)}{x\,(1 + \dfrac{4}{x})} = \frac{5x^2 - 2}{1 + \dfrac{4}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{4}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

Par quotient

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x}{x + 4} = +\infty$$

<u>Théorème</u> : La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Rédaction :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x + 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x}{x + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 = +\infty$$

8) <u>Limite d'une fonction par comparaison</u> :

On utilisera les mêmes théorèmes de comparaison que pour les suites.