Chapitre 7 GEOMETRIE DANS L'ESPACE : Vecteurs, Droites et Plans

I. Quelques règles de base :

Règle 1 : *(admise)* Deux points distincts A et B de l'espace définissent une droite et une seule notée (AB).
Trois points non alignés de l'espace A, B et C définissent un plan et un seul noté (ABC).

Règle 2 : *(admise)* Si un plan contient deux points distincts, alors il contient la droite passant par ces deux points.

Règle 3 : Dans un plan de l'espace, on peut appliquer toutes les propriétés de géométrie plane.

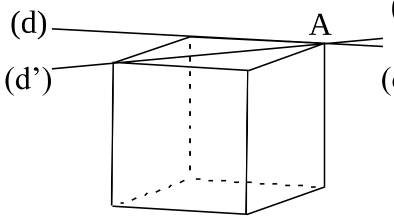
II. Positions relatives de droites et de plans de l'espace :

a) Positions relatives de deux droites de l'espace :

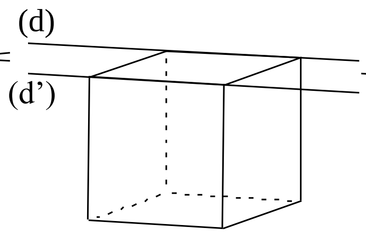
Définition : Deux droites de l'espace sont dites **………………………**si elles sont contenues dans un même plan.

Deux droites de l'espace sont :

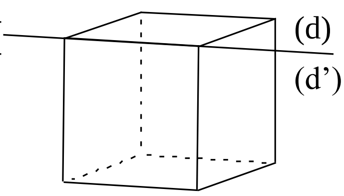
Soit coplanaires :



(d) et (d') ont un seul point d'intersection : A.

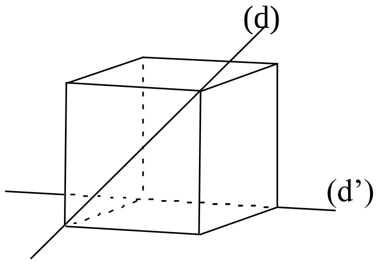


(d) et (d') sont strictement parallèles.



(d) et (d') sont confondues.

Soit non coplanaires :



Aucun plan ne contient (d) et (d').

Définition : Deux droites de l'espace sont dites **parallèles** si elles sont contenues dans un même plan et parallèles dans ce plan.

Attention : Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles!

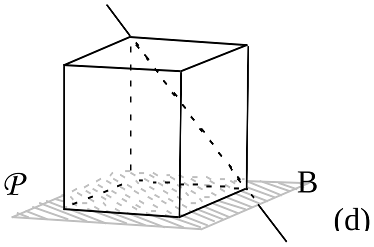
b) Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace :

Définition : Une droite et un plan de l'espace sont dits **………………………** s'ils n'ont pas de point commun ou si la droite est incluse dans le plan. Sinon, on dit qu'ils sont **………………………**

Propriété : Si une droite et un plan de l'espace sont sécants, alors ils n'ont qu'un seul point commun.

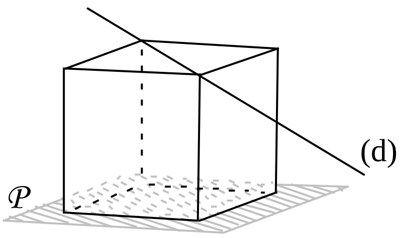
Une droite et un plan de l'espace sont :

Soit sécants :

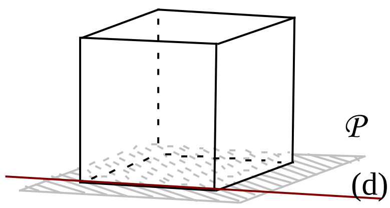


(d) et $\mathcal{P}$ ont un seul point d'intersection : B.

Soit parallèles :



(d) et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.



(d) est contenue dans $\mathcal{P}$

On note (d) // $\mathcal{P}$

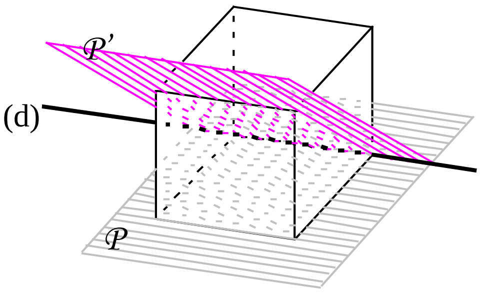
c) Positions relatives de deux plans de l’espace :

Définition : Deux plans sont dits **parallèles** s’ils n’ont pas de point commun ou s’ils sont confondus.
Sinon, on dit qu’ils sont **sécants**.

Propriété : *(admise)* Si deux plans sont sécants, alors leur intersection est réduite à une droite.

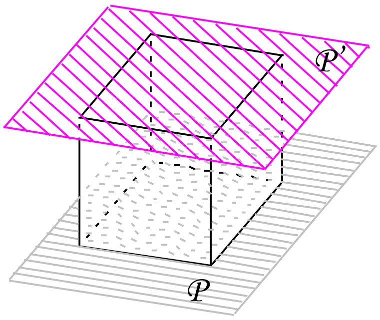
Deux plans de l’espace sont :

Soit sécants :

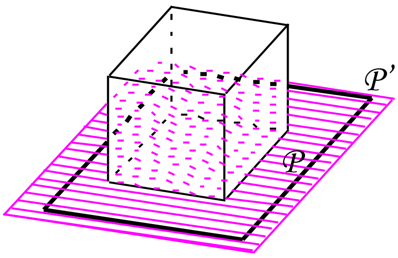


$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont une droite d’intersection (d).

Soit parallèles :

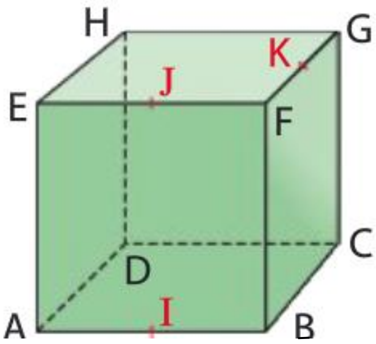


$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

d) Exemple :



ABCDEFGH est un cube.
I,J,K sont les milieux respectifs de [AB], [EF] et [FG].
Etudier la position relative :

1) de la droite (IK) et du plan (BCF).

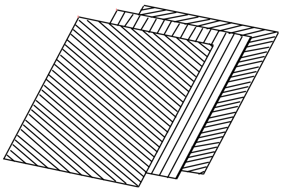
2) de la droite (AI) et du plan (FGC)

3) des plans (EFG) et (EAD).

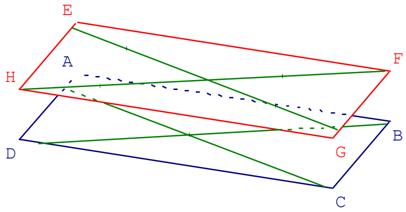
4) des plans (IJK) et (BFH).

III. Parallélisme dans l'espace :

a) Propriétés permettant de montrer que deux plans sont parallèles :



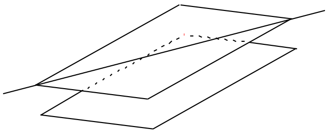
Propriété 1: *(admise)* Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles entre eux.



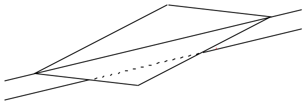
Propriété 2: *(admise)*
Si deux droites sécantes d'un plan sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Exemple : (HF) // (DB) et (EG) // (AC), donc les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles.

b) Propriétés permettant de montrer qu'une droite est parallèle à un plan :



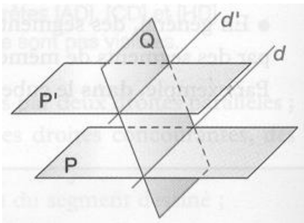
Propriété 3: Si deux plans sont parallèles, alors toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre plan.



Propriété 4: Si un plan contient une droite (d) parallèle à une droite (d') alors le plan et la droite (d') sont parallèles.

c) Propriétés permettant de montrer que deux droites sont parallèles :

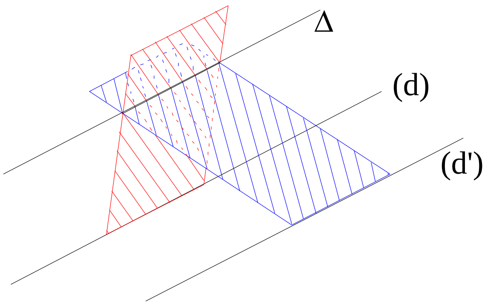
Propriété 5 *(admise)* (valable aussi en géométrie plane) :
Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.



Propriété 6 *(admise)* :
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles.

Propriété 7 *(admise)* :
Si une droite (d) et un plan (P) sont parallèles, tout plan contenant (d) et sécant à (P) coupe (P) en une droite parallèle à (d).

Propriété 8 *(théorème du toit)*:
Si deux plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (Δ)
et si (d) et (d') sont deux droites parallèles respectivement contenues dans les plans (P) et (P')
alors la droite (Δ) est parallèle aux droites (d) et (d').



IV. Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires :

1) Définition :

Un plan de l'espace est défini par la donnée de trois points A, B et C non alignés.

Le plan (ABC) est alors l'ensemble des points M tels que ……………………………………………..

En effet :

Si M $\in$ (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose en combinaison linéaire de deux vecteurs du plan.
Il suffit de choisir (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) comme repère du plan.
Si $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ alors M(x ; y) dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) donc M $\in$ (ABC).

Vocabulaire :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires alors le plan défini par un point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan.

2) Parallélisme de deux plans :

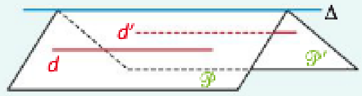
Soit deux plans (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et (B, $\vec{u'}$, $\vec{v'}$).
Deux plans sont parallèles si deux sécantes de l'un sont parallèles à deux sécantes de l'autre.
Par exemple, si la droite (A, $\vec{u}$) est parallèle à la droite (B, $\vec{u'}$)
et si la droite (A, $\vec{v}$) est parallèle à la droite (B, $\vec{v'}$), on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ d'une part, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ d'autre part, sont colinéaires.

Deux plans (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et (B, $\vec{u'}$, $\vec{v'}$) sont parallèles
$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ d'une part, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ d'autre part sont colinéaires.

Cas particulier : Les plans (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et (B, $\vec{u}$, $\vec{v}$) sont parallèles.

Conséquence : Le théorème du toit. Voir démonstration page 297.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans sécants suivant une droite Δ.
d est une droite de $\mathscr{P}$ et d' une droite de $\mathscr{P}'$ qui sont parallèles.
Démontrer que Δ est parallèle à d et d'.



Solution

Logique

On note $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d et d'.
On raisonne par l'absurde. Pour cela, on suppose que Δ et d ne sont pas parallèles, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$.
Δ et d' ne sont également pas parallèles, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs de $\mathscr{P}'$.

On suppose que la négation de ce que l'on doit démontrer est vraie, à savoir « Δ non parallèle à d ». Et on démontre que cette hypothèse supplémentaire aboutit à une contradiction : c'est donc que cette hypothèse supplémentaire est fausse et donc que : $\Delta \,//\, d$.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont des vecteurs directeurs en commun et devraient donc être parallèles.
On aboutit ainsi à une contradiction avec l'hypothèse supplémentaire, cette contradiction prouve que Δ et d sont parallèles. Et Δ est aussi parallèle à d'.

V. Vecteurs coplanaires :

1) Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires si et seulement si ils peuvent être représentés dans le même plan.

Remarque : Deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires ! (comme deux points sont toujours alignés)

2) Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Les trois vecteurs seront ………………………… si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

En général, on représente alors ces vecteurs à partir d'un même point O et on retrouve alors la décomposition classique d'un vecteur dans un plan de repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

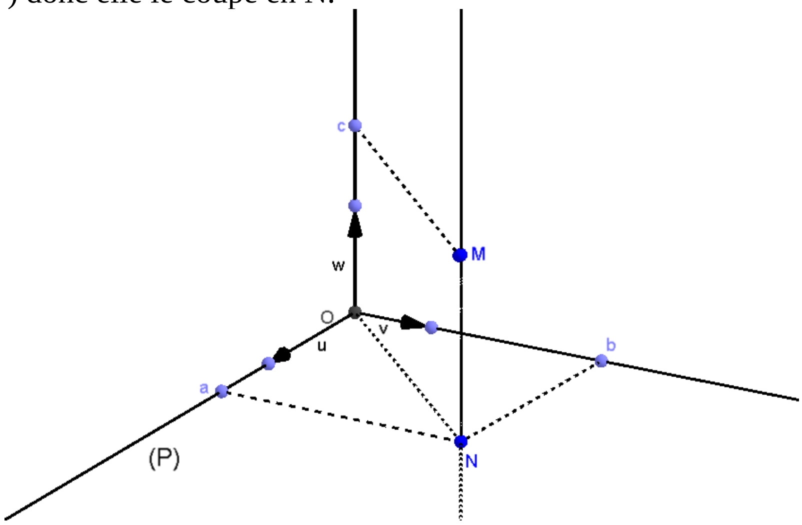
3) Décomposition d'un vecteur :

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace (donc non colinéaires deux à deux).
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet (a ; b ; c) de réels tels que $\vec{t} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$.

Démonstration :

Existence du triplet :

Soit O un point de l'espace et (P) le plan (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Il existe un unique point M de l'espace tel que $\vec{t} = \overrightarrow{OM}$.
$\vec{w}$ n'étant colinéaire ni à $\vec{u}$, ni à $\vec{v}$, la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{w}$ n'est pas parallèle au plan (P) donc elle le coupe en N.



N appartient au plan (P) donc il existe un couple de réels (a ; b) tels que $\overrightarrow{ON} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.
D'autre part, N est sur la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{w}$ donc il existe un réel c tel que $\overrightarrow{NM} = c\,\vec{w}$.
Or $\vec{t} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$. D'où l'existence du triplet (a ; b ; c).

Unicité du triplet :

Supposons qu'il existe deux triplets (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') tels que
$\vec{t} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = a'\,\vec{u} + b'\,\vec{v} + c'\,\vec{w}$.
$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = a'\,\vec{u} + b'\,\vec{v} + c'\,\vec{w} \Leftrightarrow (a - a')\,\vec{u} + (b - b')\,\vec{v} + (c - c')\,\vec{w} = \vec{0}$
Si $c \neq c'$ alors on a $\vec{w} = \dfrac{a' - a}{c - c'}\,\vec{u} + \dfrac{b' - b}{c - c'}\,\vec{v}$ ce qui n'est pas possible car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Donc c = c'.
On a alors $(a - a')\,\vec{u} + (b - b')\,\vec{v} = \vec{0}$ donc a = a' et b = b' car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. D'où l'unicité du triplet (a ; b ; c).

VI. Repérage dans l'espace :

1) Définition :

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et non nuls,
alors (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère du plan passant par O.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs directeurs de ce plan.

2) Propriété :

(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace alors il existe un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que
$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$.

Démonstration :

$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires donc d'après III 3) le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

3) Calculs avec les coordonnées dans l'espace :

Les formules sont les mêmes que dans le plan mais avec une coordonnée supplémentaire.

Coordonnées d'un vecteur :

Si A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B)

alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ……………………………………….

Coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs :

Si $\vec{u}$ (x ; y ; z) et $\vec{v}$ (x' ; y' ; z')

alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées …………………………………….

Coordonnées du vecteur k × $\vec{u}$:

Si $\vec{u}$ (a ; b ; c) alors les coordonnées du vecteur k × $\vec{u}$ sont ………………………….

Coordonnées du milieu d'un segment :

Si A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B) alors I milieu de [AB] a pour coordonnées

……………………………………….

Longueur d'un segment ou norme d'un vecteur :

Si A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B) dans un repère orthonormé

alors le segment [AB] a pour longueur ou le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme

AB = $\|\overrightarrow{AB}\|$ = ……………………………………………………

VII. Représentation paramétrique d'une droite ou d'un plan dans l'espace :

1) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace :

(O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$) est un repère de l'espace.
(d) est la droite passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (a ; b ; c).
M(x ; y ; z) est un point de (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

$\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t\,a \\ y - y_A = t\,b \\ z - z_A = t\,c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \\ z = z_A + t\,c \end{cases}$

Le système est une représentation paramétrique de la droite (d)

passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (a ; b ; c). t est le paramètre.

2) Représentation paramétrique d'un plan de l'espace :

(O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$) est un repère de l'espace.
(P) est le plan passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A)
et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ (a ; b ; c) et $\overrightarrow{v}$ (a' ; b' ; c')
M(x ; y ; z) est un point de (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t\,a + t'\,a' \\ y - y_A = t\,b + t'\,b' \\ z - z_A = t\,c + t'\,c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\,a + t'\,a' \\ y = y_A + t\,b + t'\,b' \\ z = z_A + t\,c + t'\,c' \end{cases}$

Le système est une représentation paramétrique du plan (P)

passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ (a ; b ; c) et $\overrightarrow{v}$ (a' ; b' ; c').
t et t' sont les paramètres.