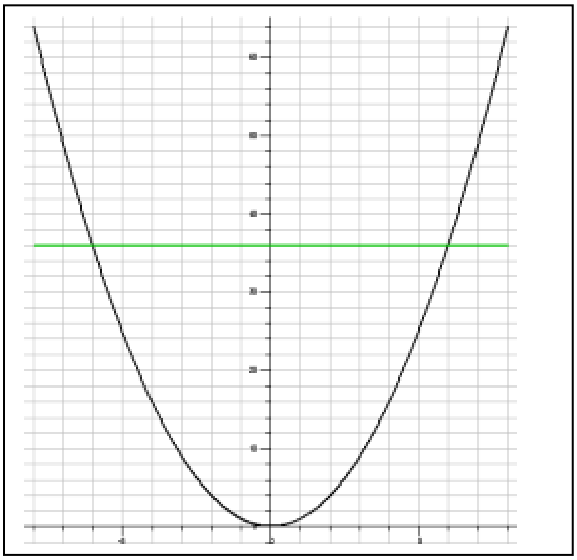
Chapitre 6 **COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES LIMITES D'UNE FONCTION**

Afin d'étudier de manière plus complète le comportement global d'une fonction, on est amené à se prononcer sur les évolutions des valeurs de cette fonction lorsque la variable se rapproche des bords de l'intervalle de définition.

I. Observation des fonctions de référence :



1) Fonctions puissance : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

a) La fonction carré : $x \longmapsto x^2$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Résoudre $x^2 \geq 36$ et interpréter graphiquement le résultat

Résoudre $x^2 \geq 10^4$.

Résoudre $x^2 \geq 10^{40}$.

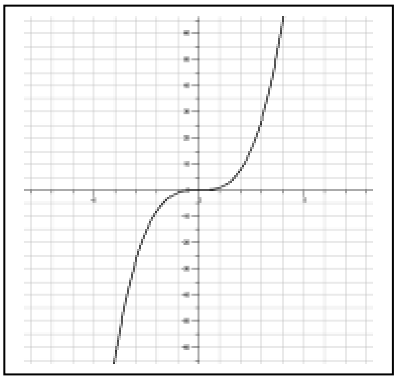
De façon générale, si A est un réel positif aussi grand que l'on veut, comment choisir x pour que $x^2 \geq A$?

Quand x devient aussi grand que l'on veut , on dit que x tend vers $+\infty$ et on note $x \longrightarrow +\infty$.
Quand x devient aussi petit que l'on veut , on dit que x tend vers $-\infty$ et on note $x \longrightarrow -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera ....

Quand x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$. On notera ....

b) La fonction cube : $x \longmapsto x^3$



$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Quand x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$. On notera ....

Quand x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$. On notera ....

c) Généralisation : $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

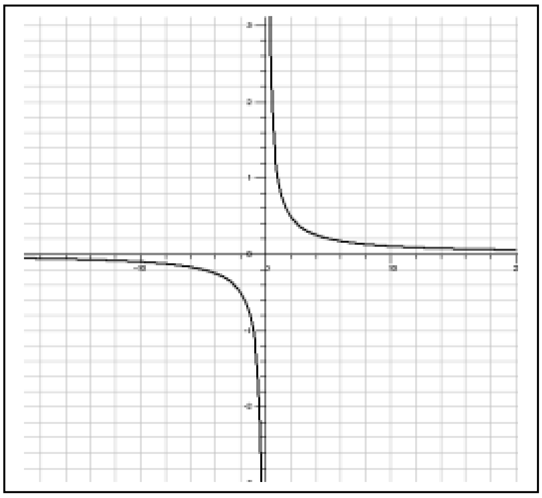
Si n est pair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^2.

Donc ……………………… et …………………………

Si n est impair , la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^n$ ressemble à celle de x^3.

Donc ………………………….. et …………………………………

2) Fonctions inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$



$D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

Calculer f(10) ; f (100) ; f (10^6).

Quand x devient grand , $\dfrac{1}{x}$ devient petit , il se rapproche de 0.

Résoudre $\dfrac{1}{x} \leq 10^{-5}$:

De façon générale, si A est un réel positif aussi petit que l'on veut, comment choisir x pour que $\dfrac{1}{x} \leq$ A ?

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, en restant positif. On notera …………………………

De même, quand x tend vers $-\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, en restant négatif. On notera ……………………

Que se passe-t-il quand x se rapproche de 0 ?

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant positif , $\dfrac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut.

  On notera ……………………………

- ✓ Quand x est aussi près que l'on veut de 0 , en restant négatif , $\dfrac{1}{x}$ devient aussi petit que l'on veut.

  On notera ………………………………..

II. Limite d'une fonction en l'infini :

1) Limite infinie en l'infini :

a) Définitions :

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand.
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ avec A un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Dire qu'une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ avec A un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez petit.
On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = \ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = \ldots\ldots\ldots$

n est un entier naturel.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \text{si n est pair} \\ \ldots\ldots\ldots & \text{si n est impair} \end{cases}$

2) Limite finie ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ en l'infini :

a) Définition :

Dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

De même dire qu'une fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit. On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

b) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$

si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = \ldots\ldots$

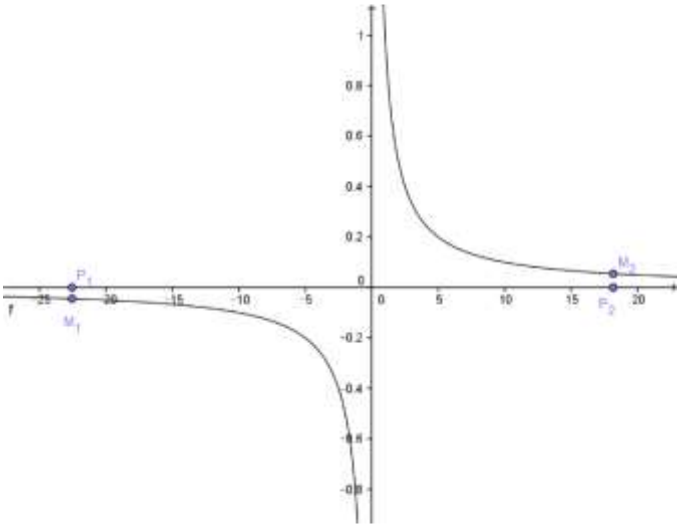
c) Conséquences graphiques :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est ....
à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est ....
à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Cela signifie que si un point M (x ; $f(x)$) appartient à la courbe représentative de f et si P(x ; ℓ) est un point de la droite $y = \ell$ alors la distance MP tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple avec la fonction inverse :



Méthode: Pour étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote d'équation $y = \ell$, on étudie le signe de la différence $f(x) - \ell$.

Si $f(x) - \ell > 0$ la courbe sera au-dessus de l'asymptote.

Si $f(x) - \ell < 0$ la courbe sera au-dessous de l'asymptote.

Pour la fonction inverse, étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote en l'infini.

III. Limite d'une fonction en une valeur finie a :

1) La valeur finie a est aux extrémités et à l'extérieur du domaine de définition (valeur interdite) :

a) Définition :

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]A ; +\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à droite en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs supérieures signifie que tout intervalle $]-\infty ; A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x > a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = -\infty$.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]A ; +\infty[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = +\infty$. On dira aussi limite à gauche en a.

¤ Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ comme limite en a par valeurs inférieures signifie que tout intervalle $]-\infty ; A[$ avec A un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a avec $x < a$. On notera alors $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = -\infty$.

b) Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

si $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x^n} = \ldots\ldots..$ et $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x^n} = \ldots\ldots\ldots$ si n est impair

$\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x^n} = \ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x^n} = \ldots\ldots\ldots$ si n est pair

c) Conséquences graphiques :

Si $f(x)$ admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (à droite ou à gauche)
on dira que la droite verticale d'équation $x = a$ est ....
à la courbe représentative de f en a .

2) La valeur finie a est à l'intérieur du domaine de définition :

Dans ce cas, la recherche d'une limite est dénuée de tout intérêt.
Si a est une valeur du domaine de définition, on posera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

IV. Opérations sur les limites :

Pour calculer une limite d'une fonction, on peut utiliser les définitions (avec les intervalles), mais c'est long et peu pratique ; donc on préfère utiliser les limites des fonctions de référence, les opérations à partir de ces fonctions de référence et les techniques de comparaison

a représente soit un réel , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1) Somme de deux fonctions :

$\lim_{x\to a} g(x) =$ / $\lim_{x\to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$	**F.I**	$+\infty$

2) Produit de deux fonctions :

$\lim_{x\to a} g(x) =$ / $\lim_{x\to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	0
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**
0	0	**F.I**	**F.I**	0

3) Inverse d'une fonction :

$\lim_{x\to a} f(x) =$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$ si $f(x) > 0$ $-\infty$ si $f(x) < 0$

4) Quotient de deux fonctions : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

$\lim_{x\to a} g(x) =$ / $\lim_{x\to a} f(x) =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^- si $\ell > 0$ 0^+ si $\ell < 0$	0^+ si $\ell > 0$ 0^- si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) > 0$ $+\infty$ si $g(x) < 0$
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	**F.I**	**F.I**	$-\infty$ si $g(x) < 0$ $+\infty$ si $g(x) > 0$
0	0	0	0	**F.I**

5) Formes indéterminées :

.... ; .... ; .... ; ....

6) Limites d'une fonction polynôme en + ∞ ou – ∞ :

Pour lever une indétermination, on factorise le terme de plus haut degré.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$

Théorème : La limite d'une fonction polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.

7) Limite d'une fonction rationnelle :

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5}$ pour $x \neq -\dfrac{5}{4}$

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$ pour $x \in D_f$ (à déterminer)

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 2x}{x + 4}$ pour $x \neq -4$

Théorème : La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

8) **Limite d'une fonction par comparaison** :

On utilisera les mêmes théorèmes de comparaison que pour les suites.

9) **Limite d'une fonction composée** :

Une fonction composée est une fonction obtenue en enchainant les fonctions de référence.

Exemple : $f(x) = e^{-2x+3}$.
f est une fonction composée d'une fonction affine $g(x) = -2x + 3$ et d'une fonction exponentielle $h(x) = e^x$. On a $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow -2x + 3 \longrightarrow e^{-2x+3}$$
$$X \longrightarrow e^X$$

Pour étudier la limite de f en $+\infty$ par exemple, on étudie d'abord

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x + 3 = -\infty$

puis on pose $X = -2x + 3$

puis on calcule $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Propriété admise :

Si a, b et c sont des réels finis ou des infinis
Si f, g et h sont des fonctions numériques réelles telles que $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow h(g(x)) = f(x)$$
$$X \longrightarrow h(X)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} h(X) = c$ Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(g(x)) = c$

Exemples : Déterminer la limite de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ *en* $-\infty$

Déterminer la limite de $f_2(x) = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2$ *lorsque x tend vers* $+\infty$

VI. Limites et fonction exponentielle :

1) Limite en + ∞ :

Pour montrer que **$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$** on utilise le théorème de comparaison.

On va étudier la fonction $g(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = e^x - 1$ $\quad g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le minimum de g sur R est g(0)= 1.

donc $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout x de IR

donc $e^x > x$ pour tout x de IR.

Or $\lim x = +\infty$ donc par comparaison

2) Limite en – ∞ :

Pour montrer que **$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$** on utilise un changement de variable.

On pose $X = -x$ donc $x = -X$. Donc quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0.$$

On peut également en déduire que **la courbe de la fonction exponentielle admet la droite y = 0 comme asymptote en – ∞.**

3) Limite et nombre dérivé :

On sait que le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 vaut $(\exp)'(0) = e^0 = 1$.

Donc on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(0 + h) - \exp(0)}{h} = 1$ donc **…………………………………….**

4) Croissance comparée de x et e^x :

a) en + ∞ : $\quad$ **$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} =$ ……………. .**

On étudie la fonction h définie par $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ sur $[0 ; +\infty[$.

$h'(x) = e^x - x = g(x)$ du 1). On a vu que $g(x) > 0$ donc $h'(x) > 0$
donc h strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$h(0) = 1$ donc $h(x) \geq 1 > 0$ pour $x \geq 0$ donc $e^x > \frac{1}{2}x^2$ pour $x \geq 0$.

Si $x > 0$ on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{1}{2}x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On peut également en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc **$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} =$ ………**

b) en – ∞ : $\quad$ **$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x =$ ……………….**

Il suffit de poser $X = -x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} -X e^{-X} = -\left(\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X}\right) = 0$.

On dit parfois que l'exponentielle l'emporte sur les puissances (x , x^2 , ….)
mais on ne doit pas l'écrire sur la copie pour justifier la limite !

VI. Etude complète d'une fonction :

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$
4) Calculer la limite de f en 1. Que peut–on en déduire pour ($\mathscr{C}_f$) ?
5) Dresser le tableau de variations de f.
6) Calculer l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) au point A d'abscisse 0.
7) Tracer ($\mathscr{C}_f$) ainsi que les asymptotes éventuelles et la tangente déterminée en 6).

VI. Etude complète d'une fonction :

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$
4) Calculer la limite de f en 1. Que peut–on en déduire pour ($\mathscr{C}_f$) ?
5) Dresser le tableau de variations de f.
6) Calculer l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) au point A d'abscisse 0.
7) Tracer ($\mathscr{C}_f$) ainsi que les asymptotes éventuelles et la tangente déterminée en 6).

VI. Etude complète d'une fonction :

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$
4) Calculer la limite de f en 1. Que peut–on en déduire pour ($\mathscr{C}_f$) ?
5) Dresser le tableau de variations de f.
6) Calculer l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) au point A d'abscisse 0.
7) Tracer ($\mathscr{C}_f$) ainsi que les asymptotes éventuelles et la tangente déterminée en 6).