FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRE 2

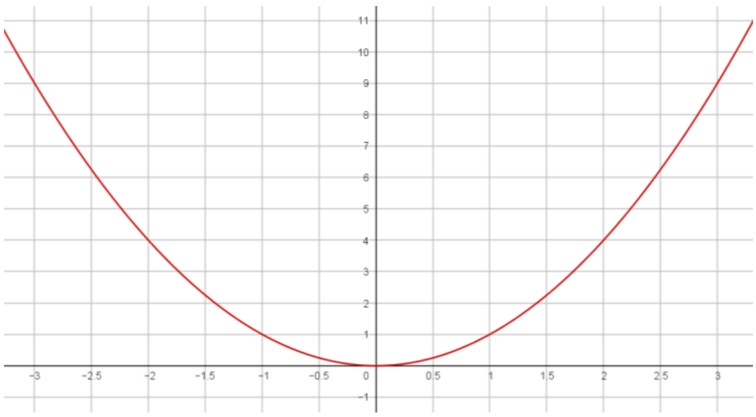
1) Rappel : la fonction carré.

La fonction carré est la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$.

a) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une parabole de sommet S (0 ; 0).
La courbe admet un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.

c) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	↘	0	↗

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

d) Signe de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	+	

Pour tout x réel, $x^2 \geq 0$.

La fonction carré est positive ou nulle sur IR

e) Parité :

On remarque que $(-2)^2 = 4 = 2^2$; $(-5)^2 = 25 = 5^2$

L'image par la fonction carré d'un nombre et de son opposé sont identiques.

$(-x)^2 = x^2$ On dira que la fonction carré est paire.

Toutes les fonctions paires ont l'axe des ordonnées comme axe de symétrie pour leur courbe représentative.

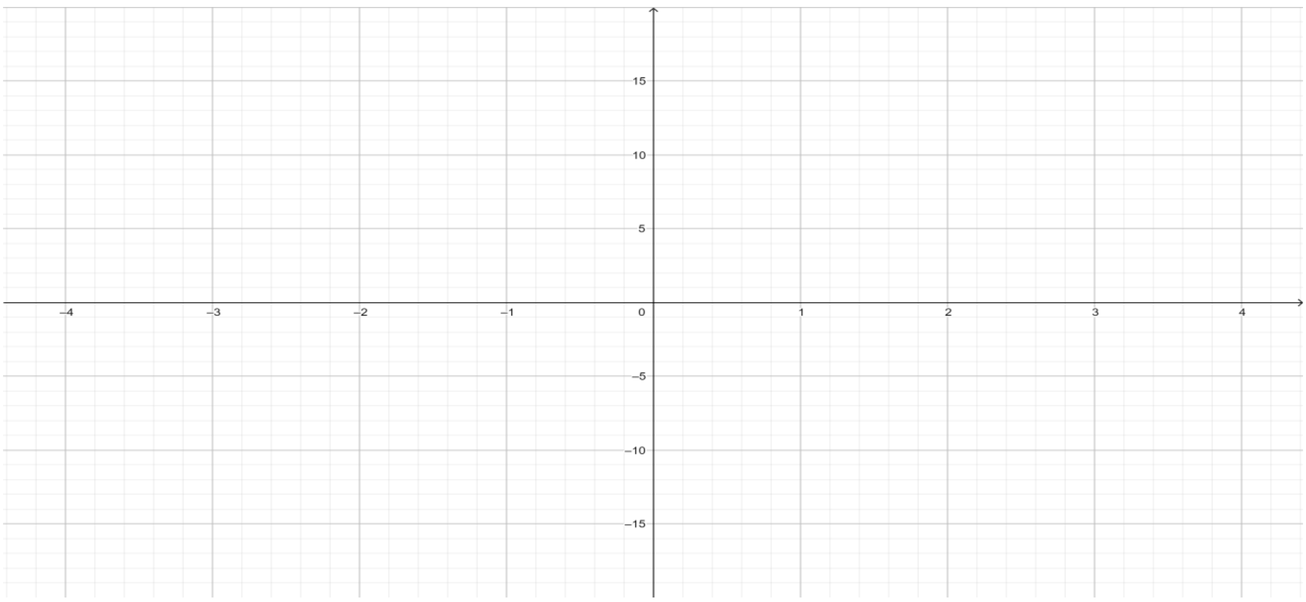
2) Les fonctions du type $f(x) = ax^2$

a) $f_1(x) = 2x^2$; $f_2(x) = 5x^2$; $f_3(x) = -3x^2$; $f_4(x) = -4x^2$

Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$					
$f_2(x)$					
$f_3(x)$					
$f_4(x)$					

Représenter sur le même graphique les fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 :



b) Constatations :

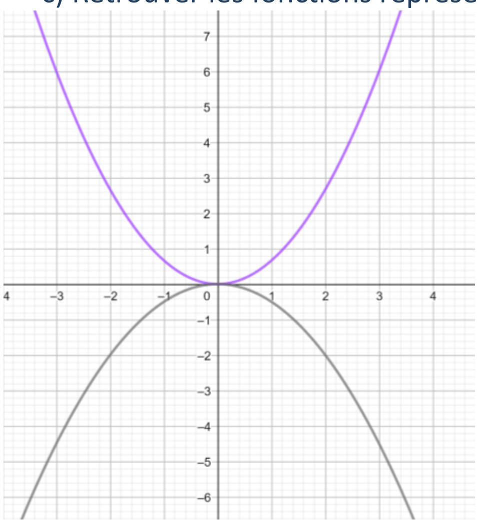
Les courbes admettent un ……………………………………………………: l'axe des ordonnées.

Elles passent par l'origine du repère, le point (0 ; 0).

Si a est positif, la parabole est tournée ………………………………………………………….

Si a est négatif, la parabole est tournée ………………………………………………………….

c) Retrouver les fonctions représentées sur le graphique :



3) Les fonctions du type $g(x) = ax^2 + b$

Si $a = 1$ et $b = 0$ on retrouve la fonction carré.

a) Quelques exemples :

Pour chaque valeur de a et b suivantes:

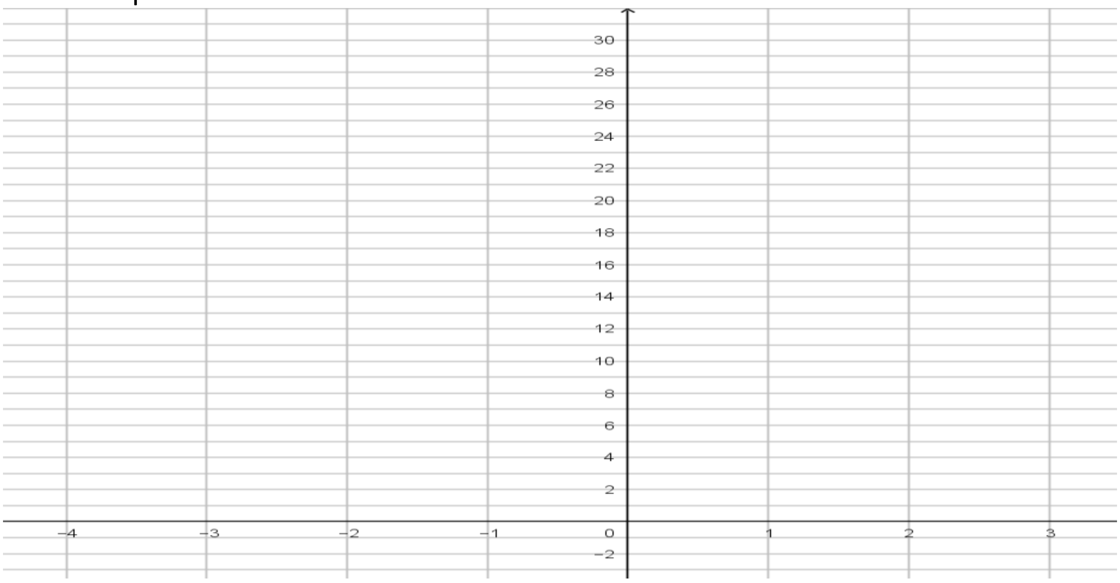
- Ecrire la fonction g correspondante.
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations
- Compléter le tableau de signes.

➢ **a = 3 et b = 1** $g(x) =$ ....

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

Courbe représentative :



Axe de symétrie : ....

Coordonnées du sommet : ....

Intersections avec l'axe des abscisses : ....

Intersections avec l'axe des ordonnées : ....

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

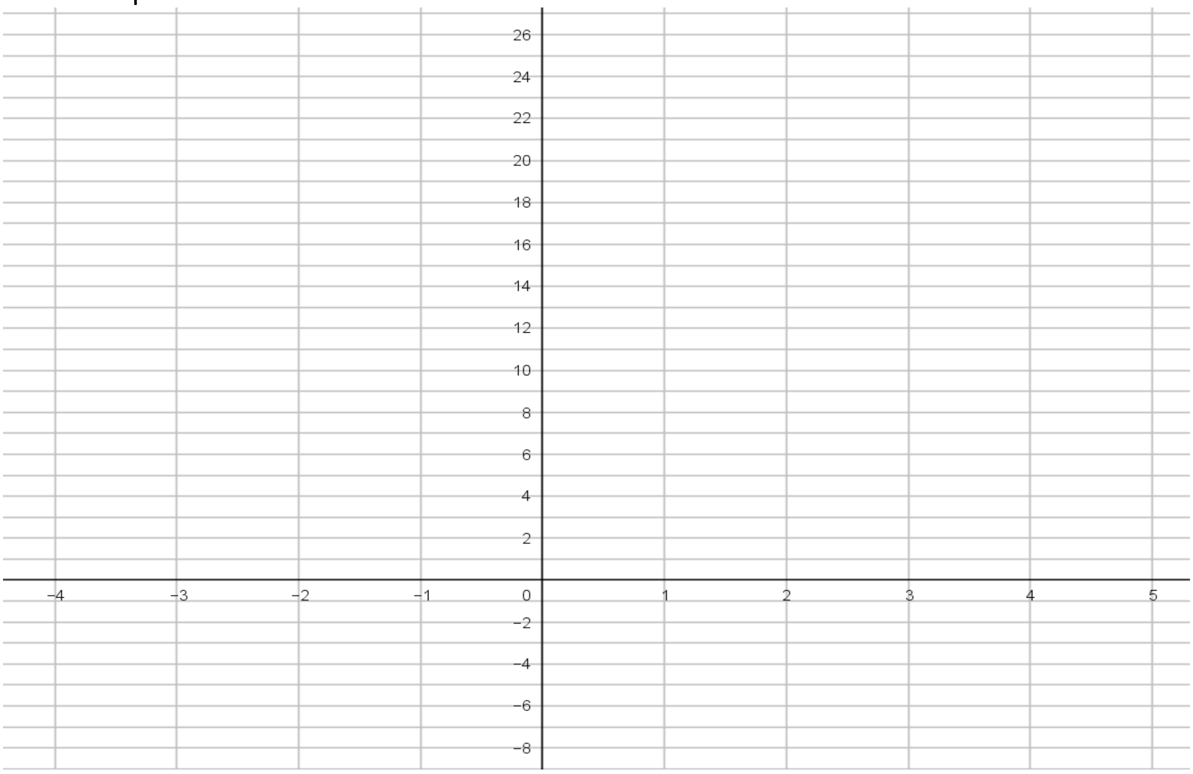
x	
signes de $g(x)$	

➢ **a = 2 et b = – 8** g(x) = ……………………………………..

Tableau de valeurs :

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
g(x)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie : …….

Coordonnées du sommet : ……………………………….

Intersections avec l'axe des abscisses : ……………………………………………………………………….

Intersections avec l'axe des ordonnées : ……………………………………………………………………….

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

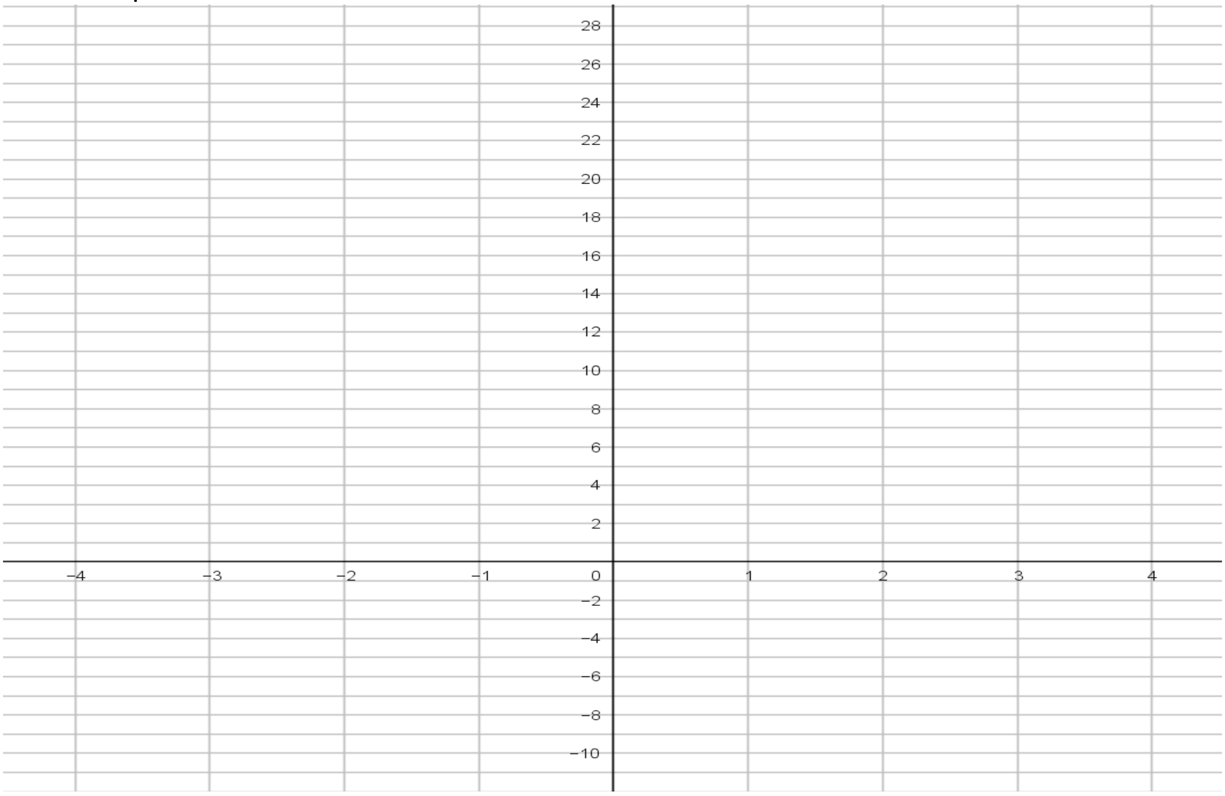
x	
signes de g(x)	

➢ **a = – 3 et b = 27** g(x) = ……………………………………….

Tableau de valeurs :

x	– 3,5	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
g(x)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie :……………………………………………………………………………………………………….

Coordonnées du sommet : …………………………….

Intersections avec l'axe des abscisses : ……………………………………………………………………….

Intersections avec l'axe des ordonnées : ……………………………………………………………………….

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

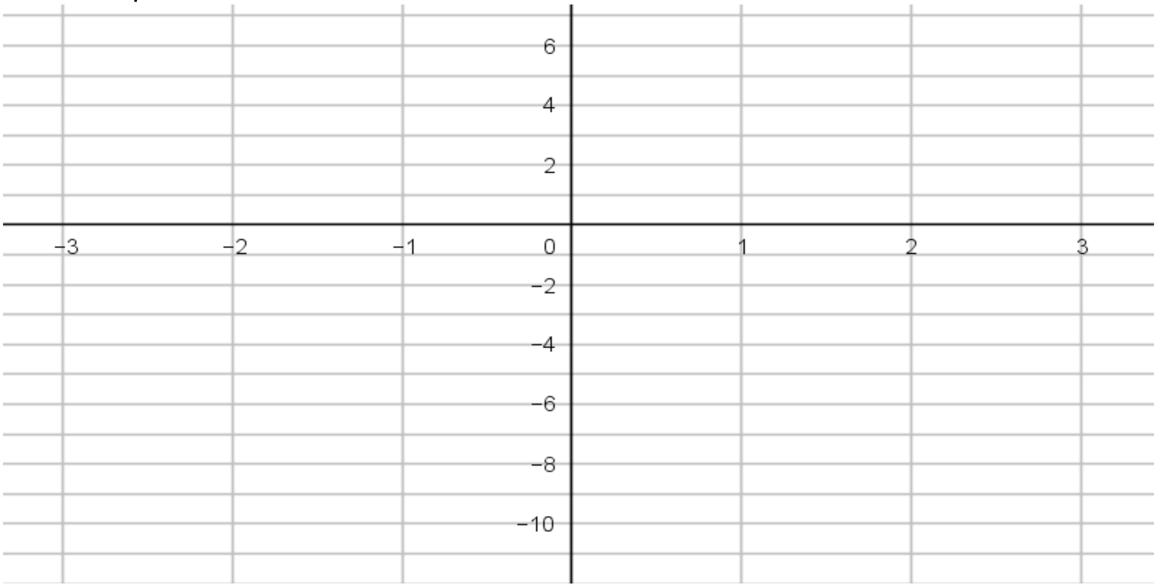
x	
signes de g(x)	

➢ **a = – 1 et b = – 2** g(x) = ……………………………………….

Tableau de valeurs :

x	– 2	– 1	0	1	2
g(x)					

Courbe représentative :



Axe de symétrie :………

Coordonnées du sommet : ………………………………

Intersections avec l'axe des abscisses : ………………………………………………………………………….

Intersections avec l'axe des ordonnées : ………………………………………………………………………….

Tableau de variations :

x	
variations de g	

Tableau de signes :

x	
signes de g(x)	

b) A retenir :

$g(x) = a\,x^2 + b$

- g est une fonction définie sur IR.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
- g est représentée par une parabole, dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et le sommet S a pour coordonnées (0 ; b).
- La fonction g est donc paire.
- Le sens de variation de g dépend du signe de a.

Si a > 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de g		↘	b	↗	

La parabole est tournée vers le haut.
La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

Si a < 0

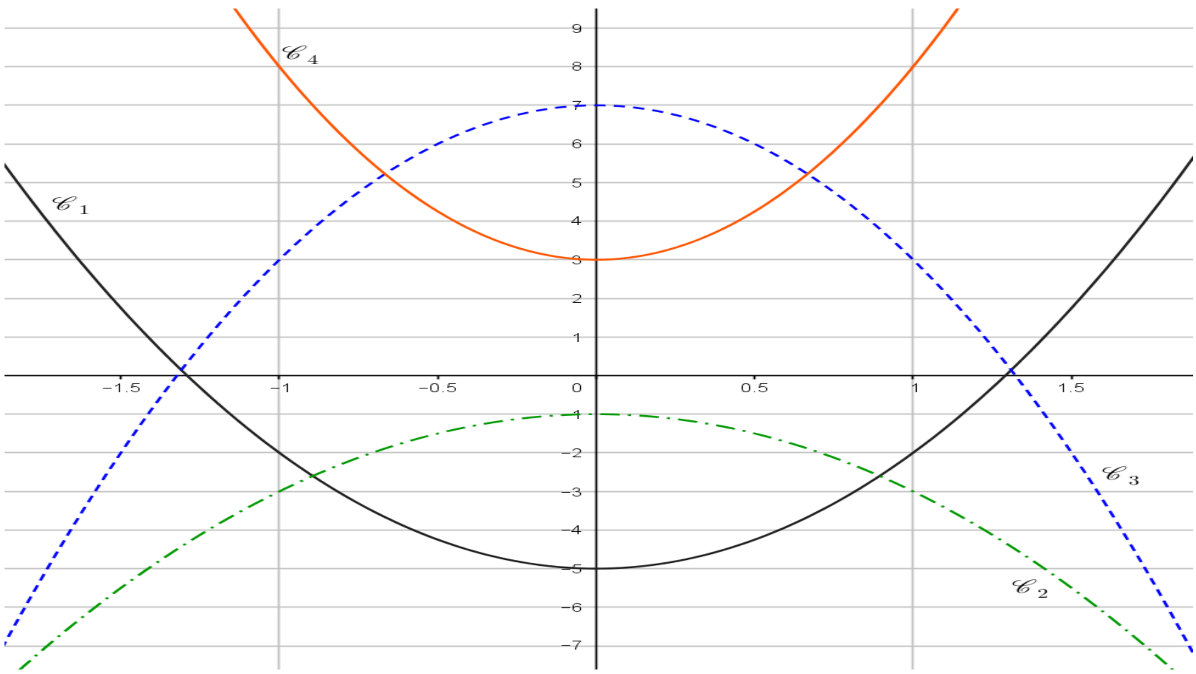
x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de g		↗	b	↘	

La parabole est tournée vers le bas.
La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

c) Associer une courbe à une fonction du type $g(x) = a\,x^2 + b$:

La courbe doit être une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
L'ordonnée du sommet est égale à b.
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, aest négatif.
g(1) = a + b donc il suffit de lire la valeur de g(1) pour trouver a.

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



4) Les fonctions du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) Quelques exemples :

Pour chacune des fonctions suivantes:

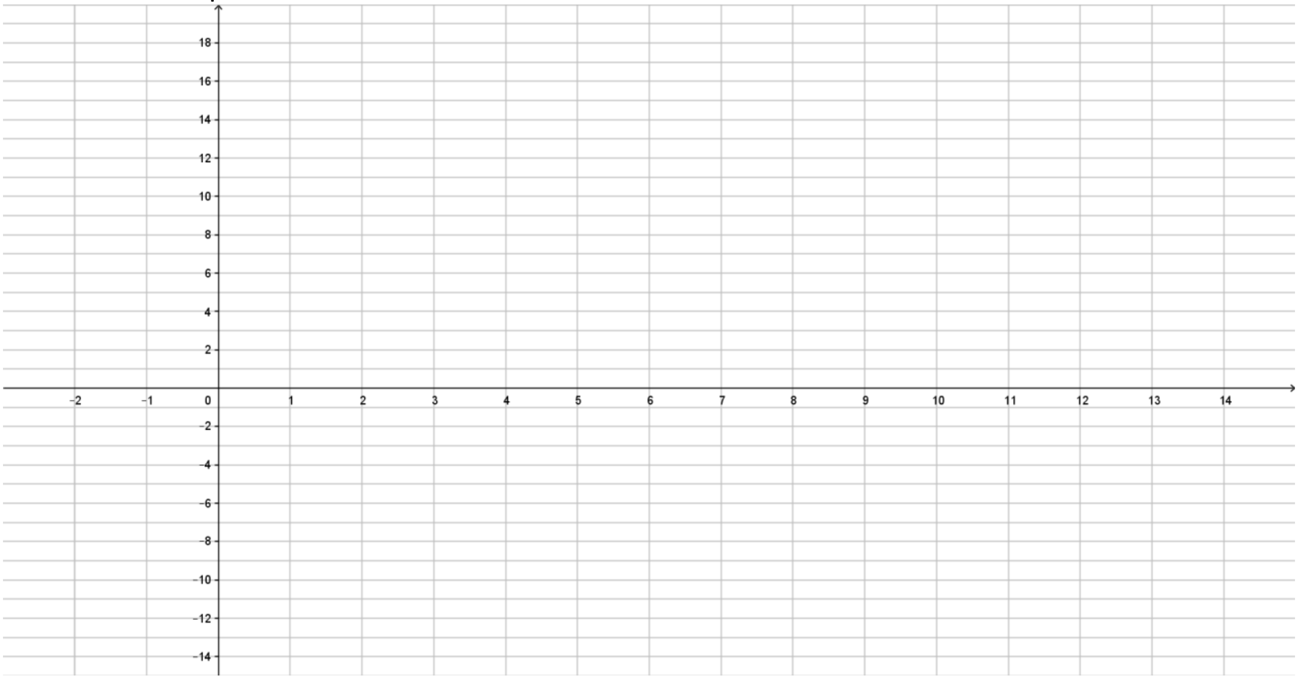
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations et le tableau de signes.

➢ $h(x) = -2(x-7)(x-1)$

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h(*x*)									

Courbe représentative :



Axe de symétrie : ………………………………………………………………………………………

Coordonnées du sommet : ……………………………….

Intersections avec l'axe des abscisses : …………………………………………………………………………

Intersections avec l'axe des ordonnées : …………………………………………………………………………

Forme développée : ……………………………………………………………………………………………………

Tableau de variations :

x	
variations de h	

Tableau de signes :

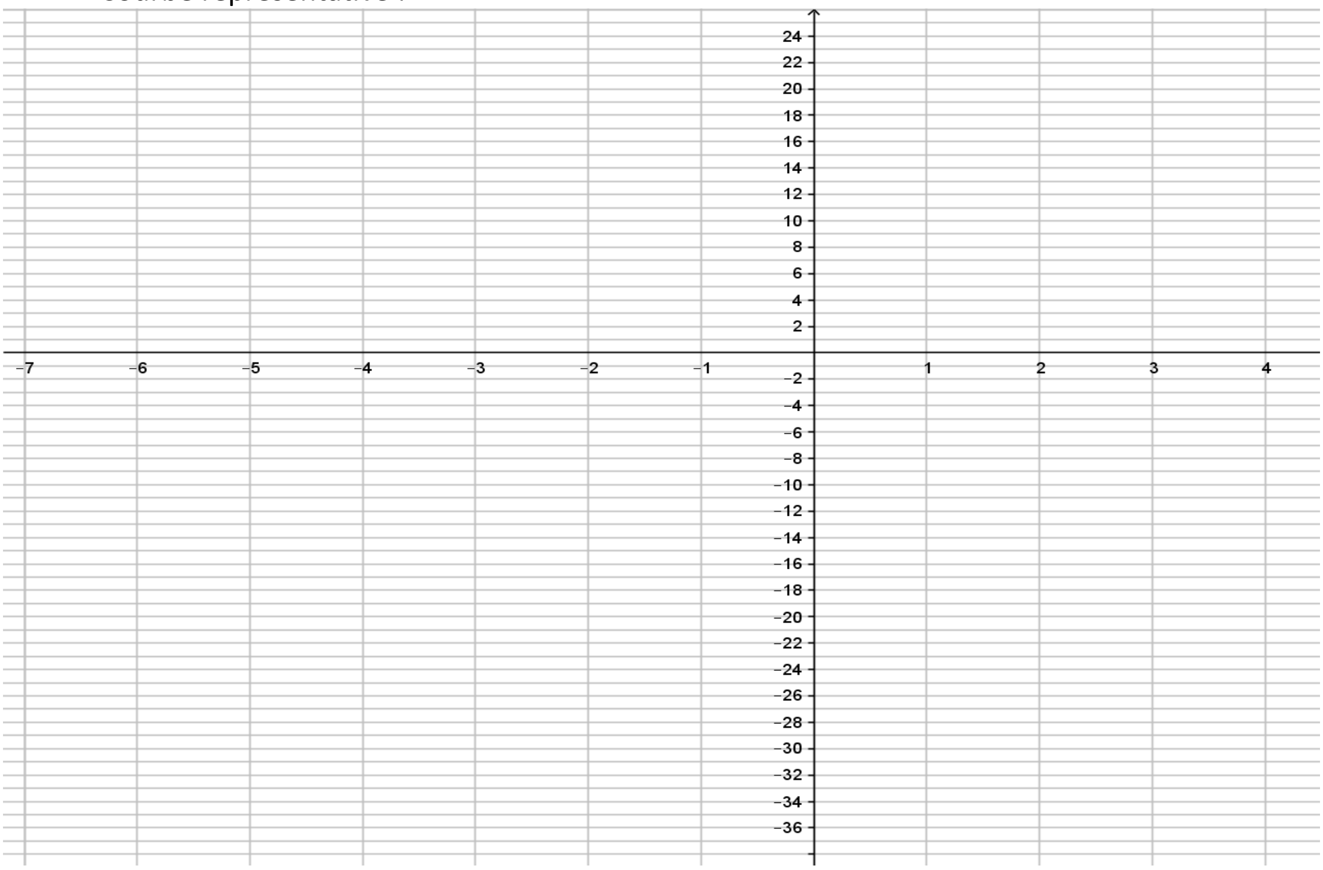
x	
signes de h(*x*)	

➢ $\mathbf{h}(x) = 3(x-2)(x+5) = 3(x-2)(x-(-5))$

Tableau de valeurs :

x	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
h(*x*)										

Courbe représentative :



Axe de symétrie : …….

Coordonnées du sommet : ……………………………….

Intersections avec l'axe des abscisses : ……………………………………………………………………….

Intersections avec l'axe des ordonnées : ……………………………………………………………………….

Forme développée : ……………………………………………………………………………………………………….

Tableau de variations :

x	
variations de h	

Tableau de signes :

x	
signes de h(*x*)	

b) A retenir :

$h(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

- h est une fonction définie sur IR.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
  En effet $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ est la forme factorisée d'un polynôme de degré 2.
  ATTENTION : Tous les polynômes de degré 2 ne sont pas factorisables.
  Pour ceux qui ne seront pas factorisables, la courbe ne coupera pas l'axe des abscisses.
- h est représentée par une parabole, tournée vers le haut si a est positif, tournée vers le bas si a est négatif, et dont l'axe de symétrie est l'axe vertical passant par le milieu de x_1 et x_2 .
- Le sens de variation de h dépend du signe de a.

Si a > 0

x	$-\infty$		$\frac{x_1 + x_2}{2}$		$+\infty$
variations de h		↘		↗	

La parabole est tournée vers le haut.
La fonction h admet un minimum atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Si a < 0

x	$-\infty$		$\frac{x_1 + x_2}{2}$		$+\infty$
variations de h		↗		↘	

La parabole est tournée vers le bas.
La fonction h admet un minimum atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

- La parabole coupe l'axe des ordonnées en $x = x_1$ et en $x = x_2$.
  En effet, pour déterminer les intersections d'une courbe avec l'axe des abscisses, on cherche les antécédents de 0 par la fonction donc on résoud l'équation $h(x) = 0$.
  Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$
  $\Leftrightarrow$ pas possible $\quad x = x_1$ ou $x = x_2$
  Donc 0 a deux antécédents par h : $x = x_1$ et $x = x_2$.
  x_1 et x_2 sont les deux valeurs qui annulent h, on dit que ce sont les **racines** de $h(x)$.

- Signe de $h(x)$:

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signes de h		+ signe de a	0	− signe de − a	0	+ signe de a	

Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signes de h		− signe de a	0	+ signe de − a	0	− signe de a	

- **CAS PARTICULIER : $x_1 = x_2$**

Alors $h(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_1) = h(x) = a\,(x - x_1)^2$.

La courbe de la fonction h ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point d'abscisse x_1 .

Signe de $h(x)$:

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
signes de h		+ signe de a	0	+ signe de a	

Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
signes de h		− signe de a	0	− signe de a	

c) Associer une courbe à une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

La courbe doit couper l'axe des abscisses en deux points ce qui permet de trouver x_1 et x_2 .

Si la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point alors on a $x_1 = x_2$.

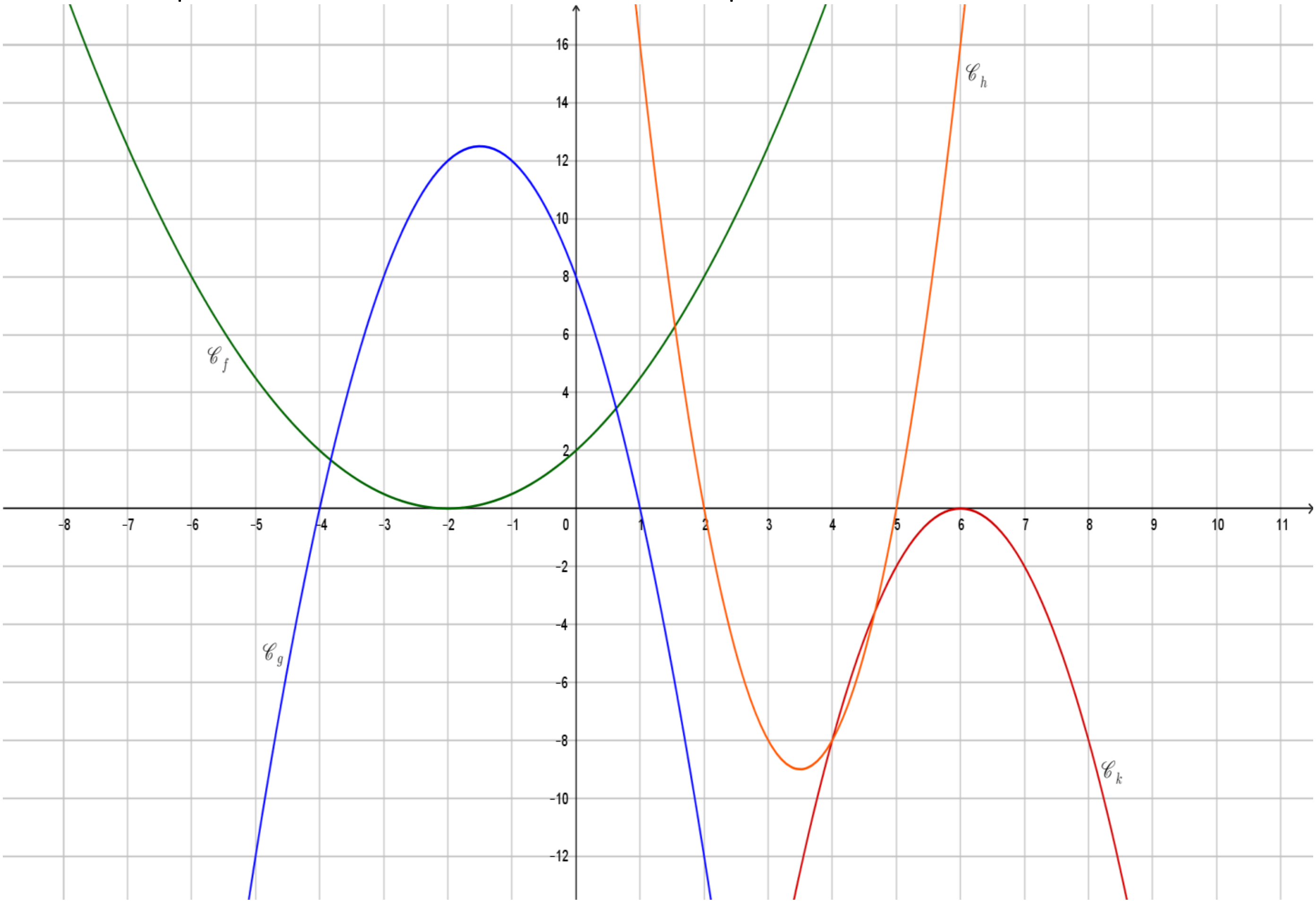
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, aest négatif.

Pour trouver a, on choisit un point de la courbe.

Par exemple $M(x_M ; y_M)$ et on écrit que $h(x_M) = y_M$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation pour trouver a .

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



d) Déterminer le signe d'une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Il faudra faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de a		signe de a		signe de a		signe de a	
signe de $x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de h(x)		signe de a	0	signe de $-$ a	0	signe de a	

Exemples :

- Déterminer le signe de $h(x) = 5(x + 4)(x - 1)$

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de a	
signe de $x + 4$	
signe de $x - 1$	
signe de h(x)	

- Déterminer le signe de $h(x) = -3(x + 5)^2$

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de a	
signe de $(x + 5)^2$	
signe de h(x)	

e) <u>Factoriser un polynôme de degré 2 si on connait une racine x_1 :</u>

Si $f(x) = a x^2 + b x + c$ et que $f(x_1) = 0$ alors f est factorisable et peut s'écrire :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On remplace a et x_1 par leur valeur respective, on développe et on égalise les coefficients des termes de même degré. On appelle cette technique, **l'identification des polynômes**.

Exemple : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$. Une racine de ce polynôme est $x = -4$.
Factoriser f .
-4 est une racine donc x_1 = ...
f peut alors s'écrire $f(x)$ = ...
On développe $f(x)$.

On a $f(x)$ = ... x^2 + (.........................) $\times x$ + ...

Or $f(x) = 3 \ x^2 + 9 \times x + (-12)$

On égalise les coefficients des termes de même degré

.... = 9 et .... = – 12

La dernière équation permet de trouver x_2 = ...

On peut alors vérifier rapidement que cette valeur vérifie la première équation.

Il ne reste plus qu'à écrire la forme factorisée de f en remplaçant a, x_1 et x_2 par leur valeur respective.

$f(x)$ = ...

Exercice : Factoriser $g(x) = -x^2 + 2x + 15$ sachant que 5 est une racine de $g(x)$.