Nom, Prénom : …………………………………………………… **Mardi 19 Novembre 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°3 (2h)

Calculette mode examen

/ 40

2 points de bonus

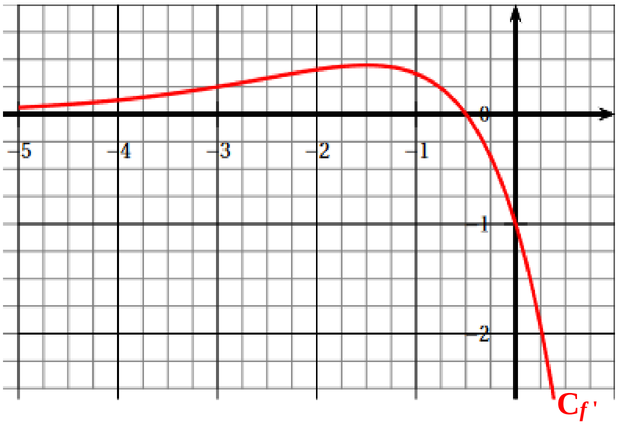
Les élèves ayant un tiers-temps ne font pas les questions précédées de @.

Exercice 1 : QCM Entourer **la** bonne réponse. *(6,5 points)*

Pour **les questions 1 et 2**, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La **courbe de sa fonction dérivée** f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0)$.

Question 1 :

1) La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$
2) La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$
3) La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$
4) Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.



Question 2 :

1) La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$
2) La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$
3) La courbe de la fonction f n'admet pas de point d'inflexion.
4) La fonction f est concave sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Question 3 :

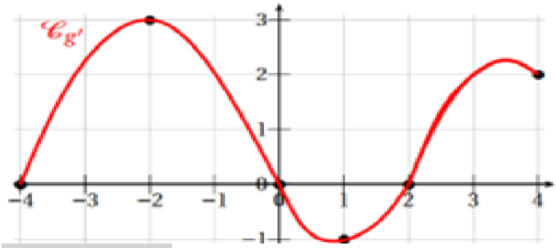
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de g est la fonction g ' définie sur $\mathbb{R}$ par :

1) $g'(x) = 2xe^{x^2}$ 2) $g'(x) = (1+2x)e^{x^2}$ 3) $g'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$ 4) $g'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$

Question 4 :

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.
On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

1) g admet un maximum en -2
2) g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$
3) g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$
4) g admet un minimum en 0



Question 5 :

Pour tout réel x, l'expression $2 + \frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}$ est égale à :

1) $\frac{5-3e^x}{1+e^x}$ 2) $\frac{5+3e^x}{1-e^x}$ 3) $\frac{5+3e^x}{1+e^x}$ 4) $\frac{5-3e^x}{1-e^x}$

Exercice 2 : Calculer les limites des suites suivantes en **détaillant les justifications**. *(13 points)*

$u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{n^2}$ $\qquad v_n = -n + n^2$ $\qquad t_n = \frac{(\frac{3}{5})^n}{(\frac{2}{3})^n}$

$k_n = \frac{-6n^2+1}{2n-4}$ $\qquad g_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ $\qquad h_n = n^3 + (-1)^n$

@Exercice 3 : *(7 points)*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n - 0{,}3$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-3 < u_n$
b) Démontrer que pour tout entier naturel n: $u_{n+1} - u_n < 0$
c) Démontrer que la suite (u_n) converge.
d) On admet que $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$. Calculer la limite de (u_n)

Exercice 4 : *(15,5 points)*

Au début de l'année 2020, une population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île, si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n(1 - 0{,}15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020+n.

1) Estimer selon ce modèle, le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2021, puis de l'année 2022.

Soit f la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = 0{,}75x(1 - 0{,}15x)$

2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1], Puis dresser son tableau de variations.
3) Résoudre dans l'intervalle [0 ; 1] l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$
b) En déduire que la suite est convergente.
c) On admettra que la limite ℓ de la suite vérifie : $\ell = 0{,}75\,\ell\,(1 – 0{,}15\,\ell)$. Déterminer ℓ.

5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera menacée tôt ou tard d'extinction.
a) Justifier que selon ce modèle le biologiste a raison.
b) Le biologiste a programmé en langage python la fonction menace() ci-dessous :

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
    u = 0,75 * u * ( 1 – 0,15 * u )
    n = n + 1
  return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace()
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction du DS3

Exercice 1 :

Question 1 : 2) Question 2 :1) Question 3 : 3) Question 4 : 3) Question 5 : 1)

Exercice 2 :

1) On a une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q= $\frac{4}{3}$ avec $q = \frac{4}{3} > 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$

De plus $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2}) = 0$ *D'où par somme des limites, on a* $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{u_n}) = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{n}^2) = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (-\boldsymbol{n}) = -\infty$ *D'où par somme des limites,on a une* ***forme indéterminée FI*** *du type*: $+\infty - \infty$

On factorise: $v_n = -n + n^2 = -n(1-n)$

$\lim_{n\to+\infty} (-\boldsymbol{n}) = -\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{1-n}) = -\infty$ *D'où par produit des limites, on a :* $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{v_n}) = +\infty$

3) On a : $t_n = \frac{(\frac{3}{5})^n}{(\frac{2}{3})^n} = (\frac{3}{5} \times \frac{3}{2})^n = (\frac{9}{10})^n$

On a une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{9}{10}$ avec $-1 < \frac{9}{10} < 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{t_n}) = \mathbf{0}$

4) $\lim_{n\to+\infty} (-\mathbf{6}\,\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{1}) = -\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{2}\,\boldsymbol{n} - \mathbf{4}) = +\infty$ *D'où par quotient on a une* ***forme indéterminée FI*** *du type :* $\frac{\infty}{\infty}$

On lève l'indétermination: $\frac{-6n^2+1}{2n-4} = \frac{n(-6\mathrm{n}+\frac{1}{n})}{n(2-\frac{4}{n})} = \frac{-6\mathrm{n}+\frac{1}{n}}{2-\frac{4}{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} (-\mathbf{6n} + \frac{1}{n}) = -\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{2} - \frac{4}{n}) = \mathbf{2}$ *D'où par quotient des limites, on a :* $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{u_n}) = -\infty$

5) Pour tout n entier naturel **non nul**, on a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ car $n^2 > 0$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{-1}{n^2}) = \mathbf{0}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2}) = \mathbf{0}$ et grâce au théorème des gendarmes, on peut donc dire que $\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{g}_n) = 0$

6) *La suite* $(-1)^n$ **n'a pas de limite**, elle vaut -1 ou 1 selon la parité de n.

On factorise n^3: $n^3 + (-1)^n = n^3(1 + \frac{(-1)^n}{n^3})$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ d'où $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ car $n^3 > 0$

Comme pour la suite précédente, avec le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n\to+\infty} (\frac{(-1)^n}{n^3}) = \mathbf{0}$

$\lim_{n\to+\infty} (1) = \mathbf{1}$ *D'où par somme des limites,on a* $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n^3}) = \mathbf{1}$

De plus $\lim_{n\to+\infty} (n^3) = +\infty$

D'où par ***produit*** *des limites, on a :* $\lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{h_n}) = +\infty$

Exercice 3 :

a) Récurrence

Initialisation :

On a : $u_0 = -1$ Or $-3 < -1$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel k, tel que P_k est vraie c'est-à-dire que $-3 < u_k$

Et on démontre que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $-3 < u_{k+1}$

On a : $-3 < u_k$ donc $-3 \times 0{,}9 < 0{,}9 \times u_k$ car $0{,}9 > 0$

donc $-2{,}7 < 0{,}9u_k$

donc $-2{,}7 - 0{,}3 < 0{,}9u_k - 0{,}3$

donc $-3 < u_{k+1}$

Donc P_{k+1} est vraie

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion :

On a P_0 vraie

P_n est héréditaire

Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}9\, u_n - 0{,}3 - u_n = -0{,}1\, u_n - 0{,}3$

Or $-3 < u_n$ donc $-3 \times (-0{,}1) > u_n \times (-0{,}1)$ donc $0{,}3 > -0{,}1u_n$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3 .

Grâce au théorème de convergence monotone,

On peut dire que la suite (u_n) converge vers une valeur supérieure ou égale à -3

d) On admet que $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$.

On a : $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}9)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \times (0{,}9)^n = 0$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3$

Donc par somme des limites on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -3$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1-0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1-0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$ soit environ 410 individus.
   • 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1-0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1-0,061425) = 0,307125 \times 0,938575) \approx 0,2882$ soit environ 288 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 0,75(1-0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,225x \leqslant 0,225 \Rightarrow -0,225 \leqslant -0,225x \leqslant 0 \Rightarrow$
   $0,75-0,225 \leqslant 0,75-0,225x \leqslant 0,75$ ou enfin $0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$.
   Sur $[0;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante de $f(0)=0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Sur $[0;1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff$
   $x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0,1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0,1125x) = 0 \iff$
   $\begin{cases} x & = 0 \text{ ou} \\ -0,25-0,1125x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \text{ ou} \\ -0,25 & = 0,1125x \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \text{ ou} \\ -\frac{0,25}{0,1125} & = x \end{cases}$.
   Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0;1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0,4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

   $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0;1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,

   soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0,6375 \leqslant 1$:

   $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

   Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

   c. On a vu à la question 3) que la seule solution de $f(x) = x$ sur [0 ;1] est 0
   Donc ℓ =0

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

   b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02
   Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$
   L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.