Chapitre 2 Les phénomènes aléatoires

I. Rituels : Automatismes

Rituel 5

1 Combien de temps faut-il à un cycliste, en minute, pour parcourir 45,5 km à une vitesse moyenne de 26 km/h ?

2 Calculer $-\left(\frac{3}{2}\right)^2-(2+1)\times\left(3-\frac{4}{3}\right)$.

3 Donner l'écriture décimale de $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$.

4 Un prix augmente de 5 % et ensuite de 3 %. Calculer le taux d'évolution global correspondant à ces deux augmentations successives.

5 Quelle est la longueur, arrondie au cm près, du côté d'un carré d'aire 30 m² ?

Rituel 6

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x-1=\frac{1}{3}x+2$.

2 Une pièce rectangulaire a pour dimensions 2,39 m de largeur et 4,98 m de longueur. Déterminer un ordre de grandeur de sa surface au sol.

3 Calculer $3-5\times2-6\div4$.

4 Calculer 40 % de 80.

5 Par combien faut-il multiplier son salaire pour qu'il augmente de 3,5 % ?

Rituel 7

1 Donner un ordre de grandeur de la surface d'un terrain de football rectangulaire de longueur 101 m et de largeur 69 m.

2 Déterminer le nombre de secondes dans 1 h 30.

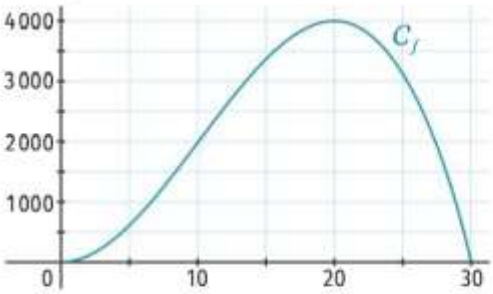
3 Écrire $\frac{12}{16}$ sous forme d'un pourcentage.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-98=0$.

5 Déterminer le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 %.

Rituel 8

1 On s'intéresse à une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



Décrire les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$.

2 Écrire $\frac{55}{88}$ sous forme décimale.

3 Calculer 25 % de 144.

4 Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x^2-3x+2=0$?

5 Donner un ordre de grandeur de $19\,994\times21$.

II. Fréquences marginales ou conditionnelles :

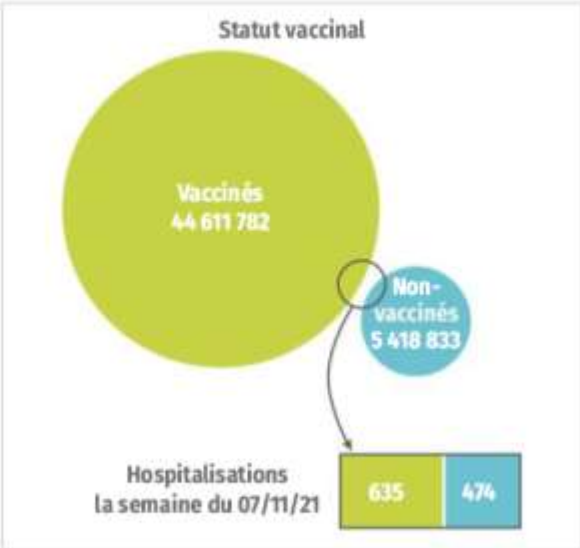
1) Activité 1 : Efficacité d'un vaccin

Objectif Introduire la notion de fréquence marginale et de fréquence conditionnelle.

Doc. 1

En novembre 2021, alors que 50 390 000 Français présentaient un schéma vaccinal complet, une cinquième vague épidémique à la progression particulièrement rapide apparaît, liée à l'émergence d'un nouveau variant. Sur les réseaux sociaux, plusieurs internautes s'interrogent alors sur l'efficacité du vaccin.

Doc. 2 Statut vaccinal et hospitalisations des Français de plus de 20 ans le 07/11/21



Source : Drees

Doc. 3 Tableau d'effectifs à compléter

La population étudiée correspond aux personnes de plus de 20 ans.

	Vaccinés	Non-vaccinés	Total
Hospitalisés la semaine du 07/11/2021			
Non hospitalisés la semaine du 07/11/2021			
Total			

Questions

1. À l'aide des informations du **doc. 2**, compléter le tableau donné au **doc. 3**.

2. **a.** Quelle est la fréquence des vaccinés dans la population étudiée ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans la population étudiée ?
   b. Ces fréquences calculées par rapport à la population totale sont appelées des **fréquences marginales**. Quelles autres fréquences marginales aurions-nous pu calculer dans cette activité ?

3. On étudie maintenant la population formée des personnes de plus de 20 ans hospitalisées la semaine du 07/11/2021.
   a. Quelle est la fréquence des vaccinés dans cette population ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans cette population ? Ces fréquences, qui ne sont pas calculées sur la population totale mais uniquement sur une de ses parties, sont appelées **fréquences conditionnelles**.
   b. Les fréquences conditionnelles calculées à la question précédente remettent-elles en question l'efficacité du vaccin ?

4. **a.** Parmi les vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?
   b. Parmi les non-vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?

Bilan

Comment distinguer une fréquence marginale d'une fréquence conditionnelle ?

Questions

1 À l'aide des informations du **doc. 2**, compléter le tableau donné au **doc. 3**.

	Vaccinés	**Non-vaccinés**	**Total**
Hospitalisés la semaine du 07/11/2021	635	474	1109
Non hospitalisés la semaine du 07/11/2021	44 611 147	54 418 359	50 030 615
Total	44 611 782	5 418 833	50 031 724

2 **a.** Quelle est la fréquence des vaccinés dans la population étudiée ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans la population étudiée ?

$f = \dfrac{44\,611\,782}{50\,031\,724} \approx 0{,}89$. On a 89% de la population française qui a été vaccinée.

$1 - 0{,}89 = 0{,}11$. On a 11% de la population française qui n'a pas été vaccinée.

b. Ces fréquences calculées par rapport à la population totale sont appelées des **fréquences marginales**. Quelles autres fréquences marginales aurions-nous pu calculer dans cette activité ?

On aurait pu calculer la féquence de hospitalisés parmi la population étudiée.

3 On étudie maintenant la population formée des personnes de plus de 20 ans hospitalisées la semaine du 07/11/2021.

a. Quelle est la fréquence des vaccinés dans cette population ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans cette population ? Ces fréquences, qui ne sont pas calculées sur la population totale mais uniquement sur une de ses parties, sont appelées **fréquences conditionnelles**.

$f = \dfrac{635}{1109} \approx 0{,}57$. On a 57% des hospitalisés qui sont vaccinés.

$1 - 0{,}57 = 0{,}43$. On a donc 43% des hospitalisés qui ne sont pas vaccinés.

b. Les fréquences conditionnelles calculées à la question précédente remettent-elles en question l'efficacité du vaccin ?

On pourrait argumenter en ce sens en disant que plus de la moitié des hospitalisés ont été vaccinés donc le vaccin ne sert pas vraiment…

4 **a.** Parmi les vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?

$\dfrac{635}{44\,611\,782} \approx 1{,}4 \times 10^{-5}$. Environ 0,0014% des vaccinés ont été hospitalisés.

b. Parmi les non-vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?

$\dfrac{474}{5\,418\,833} \approx 8{,}75 \times 10^{-5}$. Environ 0,00875% des non vaccinés ont été hospitalisés.

Ce chiffre est 6 fois plus important que celui des vaccinés ce qui pourrait justifier la vaccination.

2) Quelques exemples de calcul de fréquences marginales :

Dans une entreprise de 520 personnes, les salariés se répartissent en 4 catégories :
les ouvriers, les commerciaux, les employés administratifs et les cadres dirigeants.

a) On sait que 5% des salariés sont des cadres dirigeants, combien cela représente-t-il de personnes ?

$0{,}05 \times 520 = 26$. Il y a 26 cadres dirigeants dans cette entreprise.

b) On sait qu'il y a 442 ouvriers. Quel pourcentage des salariés de l'entreprise représentent les ouvriers ?

$\frac{442}{520} = 0{,}85$. Il y a 85% d'ouvriers parmi les salariés de l'entreprise.

c) Les employés administratifs sont 10. Quel pourcentage des salariés de l'entreprise représentent les employés administratifs ?

$\frac{10}{520} \approx 0{,}02$. Il y a environ 2% d'employés administratifs parmi les salariés de cette entreprise.

d) Le reste des salariés sont des commerciaux. Combien sont-ils ? Quel pourcentage des salariés de l'entreprise représentent les commerciaux ?

$520 - (26 + 442 + 10) = 520 - 478 = 42$. Il y a 42 commerciaux parmi les salariés de cette entreprise.

$\frac{42}{520} \approx 0{,}08$. Il y a environ 8% de commerciaux parmi les salariés de cette entreprise.

3) Définitions :

a) Effectif :

On appelle effectif n_A d'une population A, le nombre d'éléments qui constituent A.

Exemple : On appelle A la population des employés administratifs. $n_A = 10$.

b) Proportion ou fréquence marginale :

On appelle fréquence ou proportion d'une population A dans une population de référence E, le nombre $f(A) = \frac{n_A}{n_E}$.

Exemple : Si E est la population de salariés de l'entreprise, $n_E = 520$.

La proportion d'employés administratifs dans cette entreprise est

$f(A) = \frac{10}{520} = \frac{1}{52} \approx 0{,}02$

On dira qu'environ 2% des salariés de l'entreprise sont des employés administratifs.
$(0{,}02 \times 100 = 2)$

Une proportion ou fréquence est très souvent donnée en pourcentage.
C'est un nombre compris entre 0 et 1 ou entre 0% et 100%.

c) Pour retrouver l'effectif n_A d'une population A quand on connait la proportion marginale $f(A)$ de cette population (dans la population globale), il suffit de faire $\mathbf{n_A = f(A) \times n_E}$

Exemple : Pour retrouver le nombre de cadres dirigeants n_C dans l'entreprise sachant qu'ils représentent 5% des salariés, on fait : $n_C = f(C) \times n_E = 0{,}05 \times 520 = 26$.

4) Quelques exemples de calcul de fréquences conditionnelles :

Dans un club de sport, on connait les effectifs des adhérents pour chaque discipline en fonction de leur âge.

	Age / Activité	A de 16 à 18 ans	B de 19 à 25 ans	C de 26 à 35 ans	D Plus de 35 ans	TOTAL
V	Vélo	6	14	20	15	55
G	Aqua-Gym	4	9	18	35	66
S	Step	2	5	12	10	29
	TOTAL	12	28	50	60	150

a) Combien d'adhérents pratiquent le vélo ? 55

b) Combien d'adhérents ont plus de 35 ans ? 60

c) Combien d'adhérents de moins de 19 ans pratiquent l'aqua-gym ? 4

d) A partir de ce tableau, on peut remplir trois tableaux différents avec des fréquences en pourcentages:

1er tableau : Fréquences marginales

	Age / Activité	A de 16 à 18 ans	B de 19 à 25 ans	C de 26 à 35 ans	D Plus de 35 ans	TOTAL
V	Vélo	$\frac{6}{150}\times 100 = 4$	$\frac{14}{150}\times 100 \approx 9$	$\frac{20}{150}\times 100 \approx 13$	$\frac{15}{150}\times 100 = 10$	37
G	Aqua-Gym	$\frac{4}{150}\times 100 \approx 3$	$\frac{9}{150}\times 100 = 6$	$\frac{18}{150}\times 100 = 12$	$\frac{35}{150}\times 100 \approx 23$	44
S	Step	$\frac{2}{150}\times 100 \approx 1$	$\frac{5}{150}\times 100 \approx 3$	$\frac{12}{150}\times 100 = 8$	$\frac{10}{150}\times 100 \approx 7$	19
	TOTAL	$\frac{12}{150}\times 100 = 8$	$\frac{28}{150}\times 100 \approx 19$	$\frac{50}{150}\times 100 \approx 33$	$\frac{60}{150}\times 100 = 40$	100

Faire une phrase pour les résultats des cases grisées.

Il y a 4% des adhérents du club qui sont âgés de 16 à 18 ans et qui font du vélo.

Il y a 8% des adhérents du club qui sont âgés de 26 à 35 ans et qui font du step.

Pour calculer une fréquence marginale, on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total.

On note alors $f(A \cap V) = \frac{6}{150} = 0{,}04$ et $f(C \cap S) = \frac{12}{150} = 0{,}08$

2^{e} tableau : Fréquences conditionnelles (par ligne)

		A	B	C	D	
	Age / Activité	de 16 à 18 ans	de 19 à 25 ans	de 26 à 35 ans	Plus de 35 ans	TOTAL
V	Vélo	$\frac{6}{55} \times 100 \approx 10{,}9$	$\frac{14}{55} \times 100 \approx 25{,}4$	$\frac{20}{55} \times 100 \approx 36{,}4$	$\frac{15}{55} \times 100 \approx 27{,}3$	100
G	Aqua-Gym	$\frac{4}{66} \times 100 \approx 6{,}1$	$\frac{9}{66} \times 100 \approx 13{,}6$	$\frac{18}{66} \times 100 \approx 27{,}3$	$\frac{35}{66} \times 100 \approx 53$	100
S	Step	$\frac{2}{29} \times 100 \approx 6{,}9$	$\frac{5}{29} \times 100 \approx 17{,}2$	$\frac{12}{29} \times 100 \approx 41{,}4$	$\frac{10}{29} \times 100 \approx 34{,}5$	100

Faire une phrase pour les résultats des cases grisées.

Parmi les membres du club inscrits au vélo, environ 10,9% ont entre 16 et 18 ans.
Parmi les membres du club inscrits au step, environ 41,4% ont entre 26 et 35 ans.

Pour calculer une fréquence conditionnelle par ligne, on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne correspondante.

On note alors $f_V(A) = \frac{6}{55} \approx 0{,}109$ et $f_S(C) = \frac{12}{29} \approx 0{,}414$

3^{e} tableau : Fréquences conditionnelles (par colonnes)

		A	B	C	D
	Age / Activité	de 16 à 18 ans	de 19 à 25 ans	de 26 à 35 ans	Plus de 35 ans
V	Vélo	$\frac{6}{12} \times 100 = 50$	$\frac{14}{28} \times 100 = 50$	$\frac{20}{50} \times 100 = 40$	$\frac{15}{60} \times 100 = 25$
G	Aqua-Gym	$\frac{4}{12} \times 100 \approx 33{,}3$	$\frac{9}{28} \times 100 \approx 32{,}1$	$\frac{18}{50} \times 100 = 36$	$\frac{35}{60} \times 100 \approx 58{,}3$
S	Step	$\frac{2}{12} \times 100 \approx 16{,}7$	$\frac{5}{28} \times 100 \approx 17{,}9$	$\frac{12}{50} \times 100 = 24$	$\frac{10}{60} \times 100 \approx 16{,}7$
	TOTAL	100	100	100	100

Faire une phrase pour les résultats des cases grisées.

Parmi les membres du club âgés de 16 à 18 ans, 50% font du vélo.

Parmi les membres du club âgés de 62 à 35 ans, 24% font du step.

Pour calculer une fréquence conditionnelle par colonne, on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la colonne correspondante.

On note alors $f_A(V) = \frac{6}{12} = 0{,}5$ et $f_C(S) = \frac{12}{50} = 0{,}24$

III. Des fréquences aux probabilités :

1) Activité 2 : Résultats du bac

Objectif **Découvrir la notion de probabilité conditionnelle.**

Doc. 1 **Taux de réussite au baccalauréat 2021**

Avec 735 245* candidats et 689 000 bacheliers, le taux de réussite au baccalauréat 2021 est de 93,7 %. Il est de 97,5 % dans la voie générale, 93,9 % en technologique et 86,6 % en professionnel.

Extrait de la note 22.10 de mars 2022 de la direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance.

* Valeur corrigée : la note 22.10 arrondit la valeur à 735 200 candidats.

Doc. 2 **Effectifs des élèves de terminale en 2021**

Série	Générale	Technologique	Professionnelle
Effectif	381 132	145 125	208 988

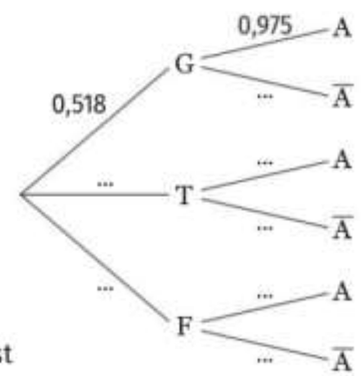
Doc. 3 **Propriétés d'un arbre pondéré**

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées.
- Dans un arbre, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

Doc. 4 **Un arbre pondéré**

On choisit un candidat au hasard parmi les candidats au baccalauréat 2021 et on définit les événements suivants.

- G : « Le candidat est dans la série générale. »
- T : « Le candidat est dans la série technologique. »
- F : « Le candidat est dans la série professionnelle. »
- A : « Le candidat est admis. »



Questions

1. Vérifier que le taux de réussite au baccalauréat 2021 est bien égal à 93,7 %.

2. **a.** Réaliser un tableau croisé d'effectifs modélisant la situation.
   b. Calculer la fréquence conditionnelle des candidats admis parmi les candidats de la série générale. Dans quel document retrouve-t-on cette valeur ? À quoi correspond-elle sur ce document ?

3. **a.** On choisit, parmi les élèves ayant passé le baccalauréat 2021 dans la série générale, un élève au hasard. On note $P_G(A)$ la probabilité conditionnelle que l'élève soit admis à l'examen sachant qu'il a passé la session générale. Que vaut cette probabilité ?
   b. Interpréter $P_F(A)$, puis calculer cette probabilité.

4. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré du doc. 4.
   b. Interpréter $G \cap A$ puis calculer $P(G \cap A)$.
   c. Calculer $P(A)$ en utilisant les chemins de l'arbre : quel résultat retrouve-t-on ?

Bilan

Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ? Où apparaissent ces probabilités dans un arbre pondéré ?

2) Quelques exemples de calcul de probabilités :

Lors d'un marathon, les 200 participants sont contrôlés. Parmi eux, 20 ont eu un résultat " positif " au test anti-dopage. A la suite d'un examen plus poussé, on se rend compte que 5 coureurs parmi les 20 testés " positif " n'avaient pris aucun produit dopant et que 2 parmi ceux testés " négatif " avaient pris des produits dopants.

a) Compléter le tableau suivant de répartition des coureurs (en effectif)

		D	$\overline{D}$	
		Coureur dopé	Coureur non dopé	TOTAL
$\overline{N}$	Testé " positif "	15	5	20
N	Testé " négatif "	2	178	180
	TOTAL	17	183	200

On choisit au hasard un coureur parmi les 200 participants. On considère les événements :
D: " le coureur choisi est dopé " et N : " le coureur choisi est testé " négatif" ".

b) Quelle est la probabilité que le coureur choisi soit testé " positif " ?

$P(\overline{N}) = \frac{20}{200} = 0{,}1$. La probabilité que le coureur choisi soit testé " positif " est 0,1.

c) Exprimer par une phrase les événements $\overline{D}$, $\overline{N}$, $D \cap \overline{N}$, $\overline{D} \cap N$.

$\overline{D}$: " le coureur choisi n'est pas dopé " ,$\overline{N}$: " le coureur choisi est testé " positif " " ,

$D \cap \overline{N}$: " le coureur choisi est dopé et est testé " positif " ",

$\overline{D} \cap N$: " le coureur choisi n'est pas dopé et est testé " négatif" "

d) Calculer $P(D \cap \overline{N})$ et $P(\overline{D} \cap N)$.

$P(D \cap \overline{N}) = \frac{15}{200} = 0{,}075$ et $P(\overline{D} \cap N) = \frac{178}{200} = \frac{89}{100} = 0{,}89$

On choisit au hasard un coureur parmi les coureurs dopés.

e) Calculer la probabilité que ce coureur soit testé "positif ".

On notera cette probabilité $P_D(\overline{N})$.

$P_D(\overline{N}) = \frac{15}{17}$

On choisit au hasard un coureur parmi les coureurs non dopés.

f) Calculer la probabilité que ce coureur soit testé "négatif ".

On notera cette probabilité $P_{\overline{D}}(N)$.

$P_{\overline{D}}(N) = \frac{178}{183}$

3) Définitions :

a) Evénement :

Un événement est un ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire.
On le notera à l'aide d'une lettre majuscule et on l'exprimera par une phrase entre guillemets.

Exemple : D: " le coureur choisi est dopé ".

On notera $\overline{D}$ l'événement **contraire** de D.

$\overline{D}$: " le coureur choisi n'est pas dopé "

b) Probabilité d'un événement :

La probabilité de l'événement A se calcule avec la formule $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple : $P(\overline{D}) = \dfrac{183}{200} = 0{,}915$ ou $\mathbf{P(\overline{D}) = 1 - P(D)} = 1 - \dfrac{17}{200} = \dfrac{183}{200} = 0{,}915$

c) Probabilité d'une réunion :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple : Calculer $P(D \cup \overline{N})$.

$P(D) = 0{,}965$; $P(\overline{N}) = 0{,}1$; $P(D \cap \overline{N}) = 0{,}075$

donc $P(D \cup \overline{N}) = P(D) + P(\overline{N}) - P(D \cap \overline{N}) = 0{,}965 + 0{,}1 - 0{,}075 = 0{,}99$

d) Probabilité conditionnelle :

A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle, la probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé. On la note $P_A(B)$, on lit ce symbole " P de B sachant A "
et on calcule cette probabilité avec la formule

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à A et B}}{\text{nombre de cas favorables à A}}$$

Exemple : Calculer $P_D(\overline{N})$.

$P(D \cap \overline{N}) = 0{,}075$; $P(D) = 0{,}965$

donc $P_D(\overline{N}) = \dfrac{P(D \cap \overline{N})}{P(D)} = \dfrac{0{,}075}{0{,}965} = \dfrac{15}{193} \approx 0{,}08$

(on retrouve le résultat trouvé dans d) exercice)