Chapitre 1 Révisions : La fonction exponentielle

I. Un résultat préliminaire :

Propriété: a et b sont deux réels et $a \neq 0$.
Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
Alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et on a $g'(x) = a \times f'(ax + b)$.

Démonstration :

Rappel : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si la limite du quotient $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ quand h tend vers 0 est un réel.
Ce réel est alors noté $g'(x)$.

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(ax+ah + b) - f(ax + b)}{h} = \frac{f(ax + b + ah) - f(ax + b)}{h}$$

$$= \frac{f(ax + b + ah) - f(ax + b)}{ah} \times \frac{ah}{h}$$

$$= \frac{f(ax + b + ah) - f(ax + b)}{ah} \times a$$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(ax + b + ah) - f(ax + b)}{ah} = f'(ax + b)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(ax + b + ah) - f(ax + b)}{ah} \times a = a \times f'(ax + b) = g'(x).$$

Exemples : $g(x) = f(-x)$ donc $g'(x) = -f'(-x)$.

$g(x) = f(3x - 1)$ donc $g'(x) = 3\ f'(3x - 1)$.

$g(x) = (3x - 1)^2$. La fonction f est la fonction carré. $f'(x) = 2x$
donc $g'(x) = 3 \times 2(3x - 1) = 18x - 6$.
On retrouve ainsi la formule des dérivées $(u^2(x))' = 2\,u'(x) \times u(x)$.

II. Définition et propriété caractéristique de la fonction exponentielle :

1) Recherche d'une fonction vérifiant l'équation $f' = f$:

Proposition: Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
Alors la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour montrer qu'une fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on montrera que le produit $f(x) \times f(-x) \neq 0$ pour tout réel x.

Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$ car $f' = f$.
$g'(x) = 0$ pour tout réel x signifie que g est une fonction constante.
$g(0) = f(0) \times f(0) = 1$ donc $g(x) = 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc $f(x) \times f(-x) = 1$ pour tout réel x.
Conclusion : le produit $f(x) \times f(-x) \neq 0$ pour tout réel x donc la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2) Définition et première conséquence :

Définition: Il existe une unique fonction f telle que $f\,' = f$ et $f(0) = 1$
Cette fonction est la fonction exponentielle, notée exp.

Démonstration : L'existence de la fonction f est admise.
Démontrons en l'unicité.
Nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe deux fonctions vérifiant les conditions de la définition. Nous montrerons alors que ces deux fonctions sont forcément égales.

Soient f et g deux fonction définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f\,' = f$ et $f(0) = 1$ et $g\,' = g$ et $g(0) = 1$.

Posons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

D'après la proposition du 1) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc h est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$h\,'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f\,'(x)}{(\,f(x)\,)^2} = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(\,f(x)\,)^2} = 0$$

Donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 1$.
Donc $h(x) = 1$ pour tout réel x donc $g(x) = f(x)$ pour tout réel x .

Si la fonction f vérifiant les conditions de la définition existe, elle est unique.

Cette fonction est la fonction exponentielle. On a donc $(\exp(x))' = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

De plus, d'après le 1) , on sait aussi que $\exp(x) \neq 0$
et que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

3) Propriété fondamentale :

Pour tout réels x et y on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
On dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration : Soit y un réel quelconque fixé.
x est un réel et k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \dfrac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$.

$\exp(x) \neq 0$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$k\,'(x) = \frac{1 \times \exp'(x + y) \times \exp(x) - \exp(x + y) \times \exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= \frac{\exp(x + y) \times \exp(x) - \exp(x + y) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$= 0$$

donc la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$ et $k(0) = \exp(y)$

donc $k(x) = \exp(y)$ pour tout réel x donc $\dfrac{\exp(x + y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

d'où $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

III. Propriétés de la fonction exponentielle :

1) Signe de la fonction exponentielle:

Proposition: La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On sait que $\exp(x) \neq 0$.

De plus $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = [\exp(\frac{x}{2})]^2$.

Donc $\exp(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés algébriques :

a) Pour tous réels x et y $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

b) Pour tous réels x_1 , x_2, ..., x_n on a $\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \ldots \times \exp(x_n)$

Cette propriété est une généralisation de la précédente.

c) Pour tout réel x et tout entier relatif n on a $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Si $n > 0$ on pose $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ et on obtient le résultat.

Si $n = 0$ $\exp(n\,x) = \exp(0) = 1 = [\exp(x)]^0$.

Si $n < 0$ alors $-n > 0$

et $\exp(nx) = \exp((-n) \times (-x)) = [\exp(-x)]^{-n} = \left[\dfrac{1}{\exp(x)}\right]^{-n} = \dfrac{1}{[\exp(x)]^{-n}} = [\exp(x)]^n$.

3) Vers une nouvelle notation :

On note $\exp(1) = e$, notation due à Leonhard Euler (1731, mathématicien suisse).
La calculette nous donne $e \approx 2{,}718$.

De plus pour tout entier relatif n on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
Les propriétés de l'exponentielle ressemblent beaucoup à celles des puissances d'où l'idée de poser $\exp(x) = e^x$.

Réécriture des propriétés de l'exponentielle :

Pour tous réels x et y , pour tout entier relatif n on a :

$e^x > 0$;

$(e^x)' = e^x$;

$e^0 = 1$; $e^1 = e$;

$e^{x+y} = e^x \times e^y$;

$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

$(e^x)^n = e^{nx}$

IV. Etude de la fonction exponentielle :

1) Sens de variation de la fonction exponentielle:

$(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : Une fonction strictement croissante ne perturbe pas l'ordre donc

Pour tout a et b réels exp(a) = exp(b) $\Leftrightarrow$ a = b ou $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

exp(a) > exp(b) $\Leftrightarrow$ a > b ou $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

2) Tracé de la courbe représentative de la fonction exponentielle:

On se sert de la calculette.

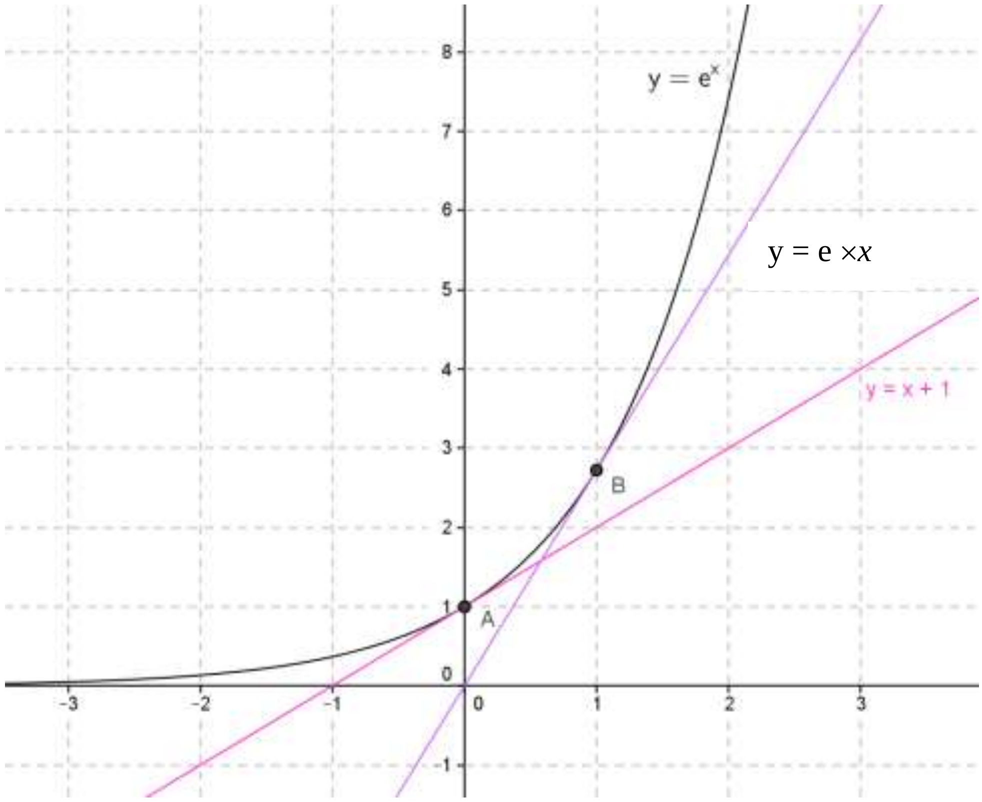
Points importants : **A (0 ; 1) et B (1 ; e).**

La courbe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

Tangentes remarquables :

En A (0 ; 1) la tangente a pour équation y = x + 1.

En B(1 ; e) la tangente a pour équation y = e × x . Elle passe par l'origine du repère.



3) Dérivation de $e^{u(x)}$ avec u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

a) Si $u(x) = ax + b$ on applique la formule de la dérivée de $f(ax + b)$ vue au I.

On a alors : $u'(x) = a$

$$\left(e^{ax+b} \right)' = a \times e^{ax+b}$$

b) Généralisation :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ on a :

$$\left(e^{u(x)} \right)' = u'(x) \times e^{u(x)}.$$

c) Exemples :

$f(x) = e^{x^2 - 3x + 5}$ On pose $u(x) = x^2 - 3x + 5$ alors $u'(x) = 2x - 3$

Donc $f'(x) = (2x - 3)\, e^{x^2 - 3x + 5}$