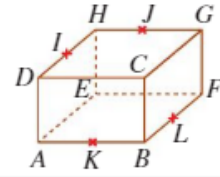


Exercice 1:

Dans toutes les questions, on considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$



- 1 $\vec{AK} + \vec{FE} - \vec{FK}$ est égal à :
 a \vec{FG} b \vec{AE} c $\vec{0}$

- 2 $\vec{AH} + \vec{FE} - \vec{CG}$ est égal à :
 a \vec{BD} b \vec{CH} c $\vec{0}$

- 3 $\vec{CE} + \vec{FB} + \vec{EG}$ est égal à :
 a \vec{CG} b \vec{GC} c $\vec{0}$

- 4 $\vec{HC} - \vec{AD} + \vec{LF}$ est égal à :
 a \vec{HF} b \vec{HL} c \vec{BL}

- 5 $\vec{IJ} + \vec{KB} + \vec{EA}$ est égal à :
 a $\vec{0}$ b \vec{IL} c \vec{IC}

- 6 Les droites (IJ) et (AF) sont :
 a coplanaires.
 b non coplanaires.
 c sécantes.

- 7 Les droites (DB) et (EF) sont :
 a coplanaires.
 b non coplanaires.
 c sécantes.

- 8 Les droites (IC) et (AB) sont :
 a coplanaires.
 b non coplanaires.
 c parallèles.

- 9 Les plans (DCG) et (EAF) sont :
 a strictement parallèles.
 b sécants.
 c confondus.

- 10 Les plans (IJA) et (HDC) sont :
 a strictement parallèles.
 b sécants.
 c confondus.

- 11 Les plans (IJE) et (CKL) sont :
 a strictement parallèles.
 b sécants.
 c confondus.

- 12 La droite (IJ) est parallèle :
 a au plan (ABF) .
 b au plan (BCG) .
 c au plan (DHF) .

VRAI

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

FAUX

Dans toutes les affirmations, on considère la figure plus haut.

- 1 \vec{AE}, \vec{AB} et \vec{LK} sont coplanaires.

- 2 \vec{AE}, \vec{BF} et \vec{CG} sont coplanaires.

- 3 Les droites (AB) et (HD) ont même vecteur directeur.

- 4 Les droites (BE) et (HC) ont même vecteur directeur.

- 5 \vec{IJ} est un vecteur directeur de (DE) .

- 6 \vec{HJ} est un vecteur directeur de (AB) .

- 7 Les plans (ABC) et (IEF) ont mêmes vecteurs directeurs.

- 8 Les plans (ADG) et (ACD) ont mêmes vecteurs directeurs.

- 9 \vec{IJ} est un vecteur directeur du plan (ABF) .

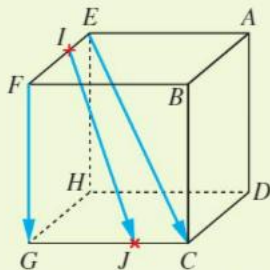
- 10 \vec{IJ} et \vec{DG} sont deux vecteurs directeurs du plan (CDG) .

- 11 (\vec{IJ}, \vec{DG}) est une base du plan (CDG) .

Exercice 2:

45 min

$ABCDEFGH$ est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{EF}$ et $\vec{GJ} = \frac{2}{3}\vec{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs \vec{FG} , \vec{IJ} et \vec{EC} sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur \vec{IJ} en fonction des vecteurs \vec{EC} et \vec{FG} . Conclure.

2. Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G; \vec{GC}, \vec{GH}, \vec{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J .

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{IJ} , \vec{EC} et \vec{FG} .

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

Exercice 3:

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- 1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -3 + t, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}. \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

- a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

VRAI

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier.

FAUX

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- 1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}. \\ z = 12 + 2t \end{cases}$$

Affirmation : Le point $A(6; -9; 16)$ appartient à Δ .

- 2 **Affirmation :** Une représentation paramétrique

de la droite \mathcal{D} , dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

passant par le point $C(-10; 81; 25)$ est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 81 - 3t, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}. \\ z = 25 + 5t \end{cases}$$

- 4 Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace telles que :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -55t + 32 \\ y = 5t \\ z = -11t + 356 \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

$$\text{et } \Delta_2 : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -11u, \text{ où } u \text{ décrit } \mathbb{R}. \\ z = 2020 \end{cases}$$

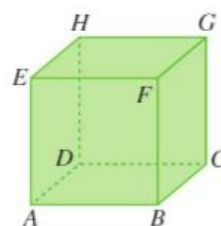
Affirmation : Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point.

- 5 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

Affirmation : Une représentation paramétrique de la droite (FD) est :

$$\begin{cases} x = -20t \\ y = 20t + 1, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}. \\ z = -20t \end{cases}$$



Exercice 4 :

- 1 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. Pour chacune de ces droites, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur.

1. $d_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 22 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 22t \end{cases}$ 2. $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -11 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -44 + 5t \end{cases}$

3. $d_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$ 4. $d_4 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t + 3 \end{cases}$

- 4 Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur \vec{u} , donnés ci-dessous. Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

1. $A(-2; 4; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $A(5; 0; -4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $A(-7; 8; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 4. $A(16; 4; 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

7 Calculer

On considère la droite \mathcal{D} dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Les points suivants appartiennent-ils à \mathcal{D} ? Justifier.

1. $C(0; -1; 4)$ 2. $D(7; 4; 3)$
3. $E(-5; 8; -1)$ 4. $F\left(\frac{11}{2}; \frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$

- 8 On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -11 - t \end{cases}$$

1. Justifier que les points $A(-5; 11; -7)$ et $B(9; -3; -21)$ appartiennent à Δ .
2. Les points A et B sont-ils alignés avec le point $C(-4; 4; 6)$?
3. Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?
4. Proposer une autre méthode pour justifier la réponse donnée à la question 3.

10 Chercher, communiquer

On considère les droites d_1 et d_2 , dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -8t - 1, t \in \mathbb{R}; \\ z = 6t - 22 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t' + 1 \\ y = 4t' \\ z = -3t' + 3 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.
2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles :
a. parallèles ?
b. coplanaires ?
c. confondues ?

CORRECTION

Exercice 1 :

QCM

- | | |
|--------|--------|
| 1 (b) | 2 (a) |
| 3 (c) | 4 (b) |
| 5 (c) | 6 (a) |
| 7 (b) | 8 (b) |
| 9 (a) | 10 (b) |
| 11 (a) | 12 (a) |

VRAI FAUX

1 **Vrai.** $\vec{LK} = \vec{LB} + \vec{BK}$
 $\vec{LK} = -\frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AB}$

Donc les vecteurs sont coplanaires.

2 **Vrai.** $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG}$

Donc les vecteurs sont coplanaires.

3 **Faux.** Les vecteurs \vec{AB} et \vec{HD} ne sont pas colinéaires (car directions différentes) donc les droites n'ont pas le même vecteur directeur.

4 **Vrai.** $\vec{BE} = -\vec{HC}$ donc \vec{BE} peut être un vecteur directeur de ces deux droites.

5 **Faux.** Les vecteurs \vec{IJ} et \vec{DE} ne sont pas colinéaires (car directions différentes) donc \vec{IJ} ne peut pas être un vecteur directeur de (DE) .

6 **Vrai.** $\vec{HJ} = \frac{1}{2}\vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

Donc \vec{HJ} est un vecteur directeur de (AB) .

7 **Faux.** \vec{IE} n'est pas directeur de (ABC) .

8 **Faux.** \vec{DG} n'est pas directeur de (ADC) .

9 **Vrai.** $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AF}$.

10 **Vrai.** Les 4 points appartiennent au plan.

11 **Faux.** Les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 2 :

69 1. $\vec{IJ} = \vec{IF} + \vec{FG} + \vec{GJ} = \frac{2}{3}\vec{EF} + \vec{FG} + \frac{2}{3}\vec{GC}$
 $= \frac{2}{3}(\vec{EF} + \vec{GC}) + \vec{FG} = \frac{2}{3}(\vec{EF} + \vec{FB}) + \vec{FG} = \frac{2}{3}\vec{EB} + \vec{FG}$
 $= \frac{2}{3}(\vec{EC} - \vec{BC}) + \vec{FG} = \frac{2}{3}(\vec{EC} - \vec{FG}) + \vec{FG} = \frac{2}{3}\vec{EC} + \frac{1}{3}\vec{FG}$

Il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{IJ} = x\vec{EC} + y\vec{FG}$, les vecteurs \vec{IJ} , \vec{EC} et \vec{FG} sont donc coplanaires.

2. a. $G(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $H(0; 1; 0)$, $F(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$,
 $I(0; \frac{2}{3}; 1)$, $J(\frac{2}{3}; 0; 0)$.

b. $\vec{FG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. Pour montrer que les vecteurs \vec{FG} , \vec{IJ} et \vec{EC} sont coplanaires, il suffit de trouver deux nombres x et y tels que $\vec{IJ} = x\vec{EC} + y\vec{FG}$.

$$\text{Donc } \vec{IJ} = x\vec{EC} + y\vec{FG} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = x \times 1 + y \times 0 \\ -\frac{2}{3} = x \times (-1) + y \times 0 \\ -1 = x \times (-1) + y \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = x \\ -\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times (-1) \\ -1 = \frac{2}{3} \times (-1) - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le système admet un couple solution $(x; y) = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

Les vecteurs \vec{IJ} , \vec{EC} et \vec{FG} sont donc coplanaires.

Exercice 3 :

QCM

VRAI FAUX

1 C

1 Vrai. $t = 2$

2 Faux. $x = -10$

4 Faux. Résoudre le système en u et t

5 Vrai. $\vec{DF} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$, et

$D(0; 1; 0)$.

Exercice 4 :

1. $A(4; 22; 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 22 \end{pmatrix}$.

2. $A(3; -11; -44)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. $A(0; 0; 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $A(-1; -2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

2. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 4t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

3. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -7 \\ y = 8 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

4. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 16 + 3t \\ y = 4 - 3t \\ z = 0 \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

Exercice 5 :

1. Le point C appartient à la droite \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 0 = 4 + 3t \\ -1 = 5 - t \\ 4 = 2 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ t = 6 \\ t = 2 \end{cases}.$$

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc, le point C n'appartient pas à la droite \mathcal{D} .

2. Le point D appartient à la droite \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 7 = 4 + 3t \\ 4 = 5 - t \\ 3 = 2 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point D appartient à la droite \mathcal{D} .

3. Le point E appartient à la droite \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} -5 = 4 + 3t \\ 8 = 5 - t \\ -1 = 2 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point E appartient à la droite \mathcal{D} .

4. Le point F appartient à la droite \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} \frac{11}{2} = 4 + 3t \\ \frac{9}{2} = 5 - t \\ \frac{5}{2} = 2 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 3t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point F appartient à la droite \mathcal{D} .

8 1. Le point A appartient à la droite Δ

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} -5 = -1 + t \\ 11 = 7 - t \\ -7 = -11 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases}$$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc le point A appartient à la droite Δ .

Le point B appartient à la droite Δ

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 9 = -1 + t \\ -3 = 7 - t \\ -21 = -11 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = 10 \\ t = 10 \\ t = 10 \end{cases}$$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc le point B appartient à la droite Δ .

2. Les points A et B sont alignés avec le point C

\Leftrightarrow le point C appartient à la droite Δ

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} -4 = -1 + t \\ 4 = 7 - t \\ 6 = -11 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} t = -3 \\ t = 3 \\ t = -5 \end{cases}$$

La dernière proposition est fautive donc, par équivalences, la première est fautive également. Donc, les points A et B ne sont pas alignés avec le point C .

3. Le point C n'appartient pas à la droite Δ .

4. On prouve que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.

10 1. d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. a. On remarque que $\vec{u}_1 = -2\vec{u}_2$, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

b. Deux droites parallèles sont coplanaires, d_1 et d_2 sont donc coplanaires.

c. Le point $A(4; -1; -22)$ appartient à d_1 .

Le point A appartient à la droite d_2

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t' \text{ tel que } \begin{cases} 4 = 3t' + 1 \\ -1 = 4t' \\ -22 = -3t' + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t' \text{ tel que } \begin{cases} t' = 1 \\ t' = -\frac{1}{4} \\ t' = \frac{25}{3} \end{cases}$$

La dernière proposition est fautive donc, par équivalences, la première est fautive également. Donc, le point A n'appartient pas à la droite d_2 . Les droites d_1 et d_2 sont strictement parallèles.