# FICHE DE REVISIONS JOUR 2 Les suites CORRECTION

## Exercice 1 :

**Polynésie 4 mai 2022 Exercice 3**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

**1.** **a.** $u_1 = u_{n+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

**b.** On complète les lignes 3 et 6 du script python ci-dessous pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite $(u_n)$ de $u_0$ à $u_k$.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = 1
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = u/(1+u)
7.      return(L)
```

**2.** On admet que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est strictement positif.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car $u_n$ est strictement positif.

La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

**3.** $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente vers une limite $\ell$ positive ou nulle.

**4.** On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction $f$ est continue, car dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc la limite $\ell$ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

On résout l'équation : $\dfrac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff 0 = \ell^2 \iff \ell = 0$.

Donc la suite $(u_n)$ a pour limite 0.

**5.** **a.** Au vu des premiers termes, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

**b.** On démontre par récurrence la conjecture précédente. Soit $P_n$ la propriété : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

- Initialisation :

pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc $P_0$ est vraie.

- Hérédité :

Supposons que $P_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$ : la relation est vraie au rang $(n+1)$.

$P_{n+1}$ est donc vraie.

Comme $P_0$ est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ vraie entraîne $P_{n+1}$ vraie, d'après le principe de récurrence on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est vraie.

**Exercice 2 :**

**Polynésie 5 mai 2022 Exercice 3**

**1.** L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer $u_1$.

$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2$.

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

**2.** Résolvons $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200 - x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0 ; 100]$ : 0 et 75.

**3.** **a.** Pour tout $x$ entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 100]$ et décroissante sur $[100 ; +\infty[$, donc $f$, qui est définie sur $[0 ; 100]$ est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $P_n$ la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».

- Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété $P_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n$ un entier naturel . On suppose $P_n$ vraie.

$$\begin{aligned} P_n &\implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100) \qquad f \text{ est croissante sur } [0 ; 100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \qquad \text{car } f(0) = 0;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100 \\ &\implies P_{n+1} \end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est héréditaire.
- Conclusion : La propriété $P_0$ est vraie, et pour un naturel $n$ quelconque, si $P_n$ est vraie, $P_{n+1}$ l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

  $\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

  On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

**c.** La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite $\ell$, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

**d.** Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence $f$ est continue sur $[0 ; 100]$, intervalle contenant la limite $\ell$, d'après le théorème du point fixe, $\ell$ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0 ; 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que $\ell$ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75.

**4.** Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil p, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

**Exercice 3 :**

**Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 1 Exercice 2**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

**1.** **a.** $u_1 = \frac{1}{5}u_0^2 = \frac{16}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5}u_1^2 = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{5} = \frac{256}{125}$

**b.** On complète la fonction ci-dessous qui renvoie la valeur du terme de rang $p$ de la suite $(u_n)$.

```
def suite_u(p) :
  u = 4
  for i in range(1,p + 1) :
      u = u*u/5
  return u
```

**2.** **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0 < u_n \leqslant 4$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 4$ et $0 < 4 \leqslant 4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $0 < u_n \leqslant 4$ (hypothèse de récurrence).

  $0 < u_n \leqslant 4$ donc $0 < u_n^2 \leqslant 16$ donc $0 < \frac{1}{5}u_n^2 \leqslant \frac{16}{5}$

  Or $\frac{16}{5} = 3,2 \leqslant 4$ donc $0 < \frac{1}{5}u_n^2 \leqslant 4$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} \leqslant 4$.

  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

On a donc démontré que pour tout entier naturel $n$, on a : $0 < u_n \leqslant 4$.

**b.** $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{5} - 1\right) = u_n\left(\frac{u_n - 5}{5}\right)$

$u_n \leqslant 4$ donc $u_n - 5 < 0$ ; or $u_n > 0$ donc $u_n(u_n - 5) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

On en conclut que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** Pour tout $n$, $0 < u_n$ donc la suite $(u_n)$ est minorée par 0.

La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente.

**3.** **a.**

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5}u_n^2 = \frac{1}{5}\ell^2$ ;
- Pour tout $n$, on a : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

On peut en conclure que $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

**b.** $\ell$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{5}x^2$ ; on résout cette équation.

$x = \frac{1}{5}x^2 \iff x\left(1 - \frac{1}{5}x\right) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$

Or, pour tout $n$, on a : $0 < u_n \leqslant 4$ donc $\ell$ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 4$. La solution $\ell = 5$ n'est donc pas valable donc $\ell = 0$.

**4.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

**a.** $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(u_n^2\right) = -\ln(5) + 2\ln(u_n) = 2\ln(u_n) - \ln(5)$
$= 2v_n - \ln(5)$

**b.** $w_n = v_n - \ln(5)$ donc $v_n = w_n + \ln(5)$
$w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(w_n + \ln(5)) - 2\ln(5)$
$= 2w_n + 2\ln(5) - 2\ln(5) = 2w_n$
Donc la suite $(w_n)$ est géométrique de raison 2.

**c.** $v_0 = \ln(u_0) = \ln(4)$ donc $w_0 = v_0 - \ln(5) = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

La suite $(w_n)$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

donc, pour tout entier naturel $n$, on a : $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$.

Pour tout $n$, $v_n = w_n + \ln(5)$ donc $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

**5.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\frac{4}{5} < 1$ donc $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

$v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{v_n} = 0$.
On a donc redémontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

## <u>Exercice 4 :</u>

**Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 3**

**1.** Diminuer de 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.
On multiplie donc l'effectif de l'année $n$, $u_n$ par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

**2.** • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1\,800 + 100 = 1900$;
• $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1\,710 + 100 = 1\,810$.

**3.** *Initialisation* : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$ : l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.
*Hérédité* : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times u_n$ puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :
$900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :
$1\,000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ : l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n$, il l'est encore au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n$ : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

**4.** La récurrence précédente montre que :

— la suite $(u_n)$ est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$;
— la suite $(u_n)$ est minorée par $1\,000$

La suite $(u_n)$ converge.

**5.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 1000$.

**a.** Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel $n$ montre que la suite $(v_n)$ rdt une suite géométrique de raison 0,9.

**b.** On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

On sait que pour tout naturel $n$, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000(1 + 0,9^n)$.

**c.** Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

**6.** On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil $S$ (avec $S > 1000$).

**a.** Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n \leqslant 1020$.

On a $u_n \leqslant 1020 \iff 1000(1 + 0,9^n) \leqslant 1020 \iff 1000 + 1000 \times 0,9^n \leqslant 1020$
$\iff 1000 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n\ln 0,9 \leqslant \ln 0,02 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$
(car $\ln 0,9 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1020$ est $n = 38$ ($u_{38} \approx 1018,25$).

**b.**

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1 020:
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```

**Exercice 5 :** Plus difficile mais donné au bac !

**Métropole Réunion Mayotte 11 septembre 2020 Exercice 4**

On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel non nul $n$, par : $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

La suite $(v_n)$ est définie par :

$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

**1.** $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{8}{9}$, donc $v_2 = u_1 \times u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 3 \times 3} = \dfrac{2}{3}$.

$u_3 = \dfrac{15}{16}$, donc $v_3 = u_1 \times u_2 \times u_3 = v_2 \times u_3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{5}{8}$.

**2.**

On complète l'algorithme ci-contre afin que, après son exécution, la variable $V$ contiennent la valeur $v_n$ où $n$ est un nombre entier naturel non nul défini par l'utilisateur.

| Algorithme |
|---|
| 1. $V \leftarrow 1$ |
| 2. Pour $i$ variant de 1 à $n$ |
| 3. $\quad U \leftarrow \dfrac{i(i+2)}{(i+1)^2}$ |
| 4. $\quad V \leftarrow V \times U$ |
| 5. Fin Pour |

**3.** **a.** On a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

**b.** De par sa définition $u_n$ quotient de deux termes supérieurs à 0 est supérieur à 0.

D'après la question précédente comme $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$, soit $u_n < 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

**4.** **a.** Quel que soit $n$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_1 \times \ldots \times u_n \times u_{n+1}}{u_1 \times \ldots \times u_n} = u_{n+1}$.

Or d'après la question précédente $u_{n+1} < 1$, donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc la suite $(v_n)$ est décroissante.

**b.** Les termes $u_n$ étant supérieurs à zéro, les termes $v_n$ sont supérieurs à zéro.

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n$.

La suite $(v_n)$ est donc décroissante et minorée par 0; d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente vers un réel supérieur ou égal à zéro.

**5.** **a.** $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

**b.** Soit la propriété : $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

- *Initialisation*

$v_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2 \times 2} = \dfrac{3}{4}$ : la relation est vraie au rang 1.

- *Hérédité*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$ et supposons que $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

D'après la question précédente :

$v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)} = \dfrac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}$ ;

la relation est vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion*

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle est vraie au rang suivant; d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel non nul $n$,

$v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

**c.** On peut puisque $n \neq 0$ écrire $v_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$, donc par somme et quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$.

**6.** On considère la suite $w_n$ définie par

$w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par

$w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n)$.

On a $w_1 = \ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$;

$w_7 = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_7) = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_7) = \ln(v_7)$ soit d'après le résultat de la question 5. c. : $w_7 = \ln \dfrac{7+2}{2(7+1)} = \ln \dfrac{9}{16}$.

Or $\dfrac{9}{16} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, donc : $w_7 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 2\ln\dfrac{3}{4} = 2w_1$.