FICHE DE REVISIONS 1 La loi binomiale, les probabilités et les suites CORRECTION

Exercice 1 : 40 minutes

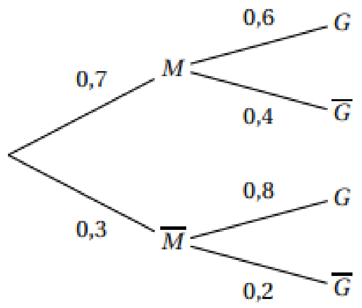
Métropole 8 septembre 2022 Exercice 2

1. **a.** On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06 \iff p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$, soit

$0,06 = 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$.

b.



c. On calcule $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. On calule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$. L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0,42(12+g)+12\times 0,28+0,24\times g+0\times 0,06 = 5,04+0,42g+3,36+0,24g = 8,4+0,66g$.

Le responsable veut que :

$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, on peut donc considérer que l'on effectue donc 100 tirages identiques et indépendants donc n = 100.
On appelle succès l'événement G : " le client a visité la grotte " et p = P(G) = 0,66.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
X suit donc une loi binomiale de paramètres n =100 et p = 0,66.
Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $P(G \leqslant 75) \approx 0,9797$, donc $P(G > 75) \approx 1 - 0,9797$ soit environ 0,0203, donc 0,020 au millième près.

Exercice 2 : 50 minutes

Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 1

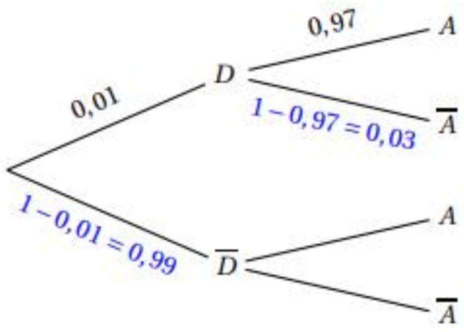
PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. On représenter les éléments de la situation que l'on connaît par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
$P(D \cap A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$.

b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \approx 0,662$.

3. La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :

$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$.

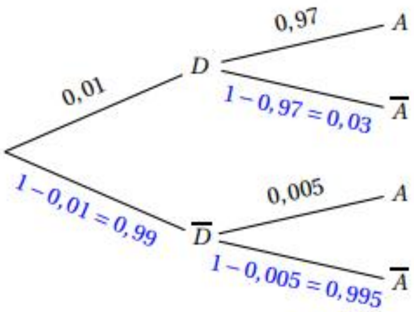
On sait que $P(A) = 0,01465$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.

On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01465 - 0,0097 = 0,00495$.

Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,00495}{0,99} = 0,005$.

On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

Cette situation est représentée par les événements $D \cap \overline{A}$ et $\overline{D} \cap A$.

La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :

$P\left(D \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0{,}00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

1. On a une répétition de 5 épreuves considérées comme des tirages avec remise, on peut donc considérer que l'on effectue 5 tirages identiques et indépendants donc n = 5.
   On appelle succès l'événement S : " l'alarme ne fonctionne pas correctement " et p = P(S) = 0,00525.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
   X suit donc une loi binomiale de paramètres n =5 et p = 0,00525.

2. La probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement est : $P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0{,}00525^1 \times (1-0{,}00525)^{5-1} \approx 0{,}0257$.
3. La probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement est :

   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0{,}00525^0 \times (1-0{,}00525)^5 = 0{,}0260$.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On cherche le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Comme dans la partie B, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de systèmes d'alarme défectueux suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}00525$.

On cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) > 0{,}07$.

$P(Y \geqslant 1) > 0{,}07 \iff 1 - P(Y=0) > 0{,}07 \iff 0{,}93 > P(Y=0)$

$P(Y=0) < 0{,}93 \iff \binom{n}{0} \times 0{,}00525^0 \times (1-0{,}00525)^n < 0{,}93 \iff 0{,}99475^n < 0{,}93$

[redacted] donc il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Vérification à la calculatrice

- Pour $n = 13$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0{,}0661 < 0{,}07$.
- Pour $n = 14$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0{,}0710 > 0{,}07$.

Exercice 3 : 45 minutes

Asie 18 mai 2022 Sujet 1 Exercice 4

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

a.
- $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$;
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,0922383 = 0,3922383$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} = 1 - 0,428\,02018 = 0,571\,17182 \approx 0,571$ au millième près.

c. D'après le tableau la suite (p_n) semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

2. **a.** On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Initialisation : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit $0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :

$0 \leqslant 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :

$0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$, soit

$0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$. On peut donc écrire :

$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0,5$.

3. **a.** Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1 + 0,4}{2 \times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1 - 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

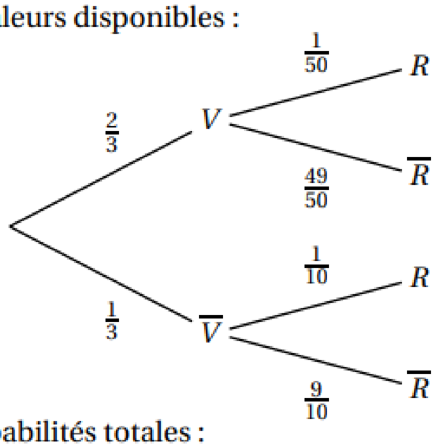
On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :
2   p = 0.3
3   s = [p]
4   for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p*p
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Exercice 4 : 35 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 1 Exercice 1

1. **a.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(R) = p(R \cap V) + p\left(R \cap \overline{V}\right) = p_V(R) \times p(V) + p_{\overline{V}}(R) \times p\left(\overline{V}\right) = \dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{150}$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R \cap V)}{p(R)} = \dfrac{\dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** On a une répétition de 20 épreuves identiques et indépendants donc n = 20.

On appelle succès l'événement V : " Paul prend son vélo pour se rendre à la gare " et p = P(V) = $\dfrac{2}{3}$.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

X suit donc une loi binomiale de paramètres n =20 et p = $\dfrac{2}{3}$.

b. $p(X = 10) = \dbinom{20}{10} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0,054.$

c. $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0,962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3} \approx 13,333$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

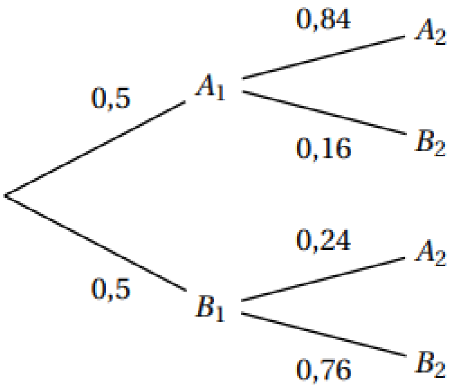
$E(t) = 0,14 \times 10 + 0,13 \times 11 + 0,13 \times 12 + 0,12 \times 13 + 0,12 \times 14 + 0,11 \times 15 + 0,10 \times 16 + 0,08 \times 17 + 0,07 \times 18$
$= 13,5$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

Exercice 5 : 45 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 2 Exercice 1

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

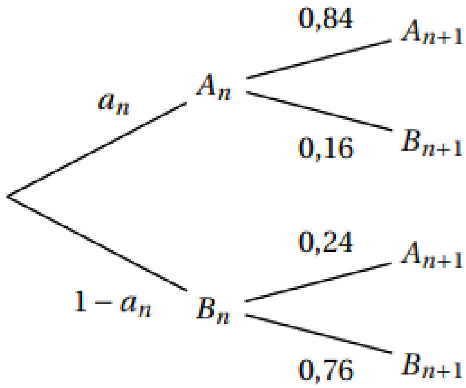
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54$. Donc $a_2 = 0,54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6\ a_n + 0,24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

D'après la question précédente, $a_{n+1} = 0,6\ a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6\left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}\right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0,599$. $a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6-0,1\times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599$
$\iff -0,1\times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.

[redacted]

À la calculatrice, [redacted] $n \geqslant 11$.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à $0,599$ à partir du 11-ième jour.