1STMG Fiche de révisions sur les suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1 :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$. On donne $u_4 = 2$.

1) Calculer u_3 , u_5 , u_2 , u_1 , u_0 et u_9.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) Si on représentait la suite dans un repère, comment seraient les points ?

Exercice 2 :

On donne $u_n = 5 \times 2^n$, pour tout n entier naturel.

1) Calculer les quatre premiers termes.
2) Conjecturer la nature de la suite.
3) Calculer u_{n+1} en fonction de n.
4) Démontrer la conjecture.

Exercice 3 :

On donne les termes suivants : $-\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{25}{72}$; $-\frac{125}{432}$

1) Cette suite semble-elle géométrique ? arithmétique ? Justifier.
   Si oui, préciser la raison et le premier terme.
2) Calculer le cinquième et le sixième terme de cette suite.

Exercice 4 :

Pour chacune des suites suivantes,

1) Calculer les trois premiers termes, établir une conjecture sur la nature de la suite puis démontrer la conjecture.
2) Donner le sens de variation de la suite en justifiant.

$$u_n = 5n - 2 \quad ; \quad v_n = 5 \times 1{,}3^n \quad ; \quad w_n = \frac{5}{4^n} \quad ; \quad t_n = n^2 - 3$$

Exercice 5 :

En 2010, le chiffre d'affaires d'une entreprise s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires augmente de 7 %. On note v_n le chiffre d'affaires de l'année 2010 + n donc v_0 = 150 000.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 2011.
2. Calculer les chiffres d'affaires v_2, v_3 et v_4 .
3. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on dire sur la nature de la suite v ?
4. En déduire le chiffre d'affaires en 2020 de l'entreprise.
5. En combien d'années, le chiffre d'affaire a-t-il augmenté de 50% ?

Exercice 6 :

En 2010, dans un lycée où l'on consomme actuellement 7 000 ramettes de papier par an, on envisage des restrictions. On décide de diminuer la consommation de 250 ramettes par an.
On appelle v_1 le nombre de ramettes consommées en 2011 soit un an après le début des restrictions, v_2 le nombre de ramettes en 2012 soit au bout de 2 ans …

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Quelle est la nature de la suite v ?
3. Calculer le nombre de ramettes qui seront consommées dix ans après le début des restrictions.
4. Au bout de combien d'années, la consommation de papier sera pour la première fois au-dessous de 2 400 ramettes ?

CORRECTION

Exercice 1 :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$. On donne $u_4 = 2$.

1) Calculer u_3 , u_5 , u_2 , u_1 , u_0 et u_9.

$u_4 = 2$; $u_3 = \frac{u_4}{q} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$; $u_5 = u_4 \times q = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{u_3}{q} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$;

$u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{32}{\frac{1}{4}} = 128$; $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{128}{\frac{1}{4}} = 512$; $u_9 = u_4 \times q^4 = 2 \times (\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{512}$

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$u_{n+1} = u_n \times q = u_n \times \frac{1}{4}$

3) Si on représentait la suite dans un repère, comment seraient les points ?

Les points représentant la suite géométrique (u_n) ne seraient pas alignés.

Exercice 2 :

On donne $u_n = 5 \times 2^n$, pour tout n entier naturel.

1) Calculer les quatre premiers termes.

$u_0 = 5 \times 2^0 = 5 \times 1 = 5$; $u_1 = 5 \times 2^1 = 10$; $u_2 = 5 \times 2^2 = 20$; $u_3 = 5 \times 2^3 = 40$

2) Conjecturer la nature de la suite.

On passe d'un terme à l'autre en multipliant par 2 donc la suite (u_n) semble être géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$.

3) Calculer u_{n+1} en fonction de n.

$u_{n+1} = 5 \times 2^{n+1}$

4) Démontrer la conjecture.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = 2^{n+1-n} = 2$

donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$.

Exercice 3 :

On donne les termes suivants : $-\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{25}{72}$; $-\frac{125}{432}$

1) Cette suite semble-elle géométrique ? Justifier. Si oui, préciser la raison et le premier terme.

$\frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$; $\frac{-\frac{25}{72}}{-\frac{5}{12}} = \frac{5}{6}$; $\frac{-\frac{125}{432}}{-\frac{25}{72}} = \frac{5}{6}$

donc la suite (u_n) semble géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $u_0 = -\frac{1}{2}$

2) Calculer le cinquième et le sixième terme de cette suite.

$u_4 = u_3 \times q = -\frac{125}{432} \times \frac{5}{6} = -\frac{625}{2592}$ et $u_5 = u_4 \times q = -\frac{625}{2592} \times \frac{5}{6} = -\frac{3125}{15552}$

Exercice 4 :

Pour chacune des suites suivantes,

1) Calculer les trois premiers termes, établir une conjecture sur la nature de la suite puis démontrer la conjecture.
2) Donner le sens de variation de la suite en justifiant.

$u_n = 5n - 2$; $v_n = 5 \times 1{,}3^n$; $w_n = \frac{5}{4^n}$; $t_n = n^2 - 3$

Exercice 4

* $u_n = 5n - 4$

$u_0 = 5 \times 0 - 4$ | $u_1 = 5 \times 1 - 4$ | $u_2 = 5 \times 2 - 4$

$u_0 = -4$ | $u_1 = 1$ | $u_2 = 6$

On passe d'un terme à l'autre en ajoutant 5.
La suite u semble arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -4$

$u_{n+1} = 5 \times (n+1) - 4$
$= 5n + 5 - 4$
$= 5n + 1$

$u_{n+1} - u_n = 5n + 1 - (5n - 4)$
$= 5n + 1 - 5n + 4$
$= 5$

Donc la suite u est arithmétique de raison $r = 5$ et de 1er terme $u_0 = -4$

* $V_n = 5 \times 1{,}3^n$

$V_0 = 5 \times 1{,}3^0$ | $V_1 = 5 \times 1{,}3^1$ | $V_2 = 5 \times 1{,}3^2$

$V_0 = 5$ | $= 6{,}5$ | $V_2 = 8{,}45$

On passe d'un terme à l'autre en multipliant par 1,3
Donc la suite v semble géométrique de raison $q = 1{,}3$ et de 1er terme $V_0 = 5$.

$V_{n+1} = 5 \times 1{,}3^{n+1}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{5 \times 1{,}3^{n+1}}{5 \times 1{,}3^n} = \frac{1{,}3^{n+1}}{1{,}3^n} = 1{,}3^{n+1-n} = 1{,}3^1$
$= 1{,}3$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = 1{,}3$ et de 1er terme $V_0 = 5$.

* $w_n = \frac{5}{4^n}$

$w_0 = \frac{5}{4^0} = 5$ $\qquad w_1 = \frac{5}{4^1} = \frac{5}{4}$ $\qquad w_2 = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}$

On passe d'un terme à l'autre en multipliant par $\frac{1}{4}$

Donc la suite w semble géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

et de 1er terme $w_0 = 5$.

$w_{n+1} = \frac{5}{4^{n+1}}$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{5}{4^{n+1}}}{\frac{5}{4^n}} = \frac{5}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{5} = \frac{4^n}{4^{n+1}} = 4^{n-(n+1)}$$

$$= 4^{n-n-1}$$

$$= 4^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Donc la suite w est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de 1er terme $w_0 = 5$.

$t_n = n^2 - 3$

$t_0 = 0^2 - 3 = -3$ $\qquad t_1 = 1^2 - 3 = -2$ $\qquad t_2 = 2^2 - 3 = 1$

$-2 - (-3) = -2 + 3 = 1$

$1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

donc la suite t n'est pas arithmétique

$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

donc la suite t n'est pas géométrique.

Exercice 5 :

En 2010, le chiffre d'affaires d'une entreprise s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires augmente de 7 %. On note v_n le chiffre d'affaires de l'année 2010 + n donc v_0 = 150 000.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 2011.
2. Calculer les chiffres d'affaires v_2, v_3 et v_4 .
3. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on dire sur la nature de la suite v ?
4. En déduire le chiffre d'affaires en 2020 de l'entreprise.
5. En combien d'années, le chiffre d'affaires a-t-il augmenté de 50% ?

1) $V_1 = V_0 \times \left(1 + \frac{7}{100}\right)$

$= 150\,000 \times 1{,}07$

$V_1 = 160\,500$

Le chiffre d'affaires en 2011 est de 160 500€.

2) $V_2 = V_1 \times 1{,}07$

$= 160\,500 \times 1{,}07$

$= 171\,735$

$V_3 = V_2 \times 1{,}07$

$= 171\,735 \times 1{,}07$

$= 183\,756{,}45$

$V_4 = V_3 \times 1{,}07$

$= 183\,756{,}45 \times 1{,}07$

$= 196\,619{,}40$.

3) $V_{n+1} = V_n \times \left(1 + \frac{7}{100}\right)$ car augmenter de 7% c'est multiplier par $1 + \frac{7}{100} = 1{,}07$.

$V_{n+1} = V_n \times 1{,}07$

La suite v est une suite géométrique de raison $q = 1{,}07$ et de premier terme $V_0 = 150\,000$.

4) Le chiffre d'affaires en 2020 est V_{10}. $(2020 = 2010 + 10)$

$V_{10} = V_0 \times q^{10}$

$= 150\,000 \times 1{,}07^{10}$

$= 295\,072{,}70$

En 2020, le chiffre d'affaires sera d'environ 295072,70€.

5) Augmentation de 50% revient à multiplier par $CM = 1 + \frac{50}{100} = 1{,}5$.

$150\,000 \times 1{,}5 = 225\,000$.

Grâce à la calculette, on voit que $V_5 \approx 210\,393$ et

et $V_6 \approx 225\,110$.

Donc ~~le~~ le chiffre d'affaires ~~de~~ aura augmenté de 50% en 2016.

Exercice 6 :

En 2010, dans un lycée où l'on consomme actuellement 7 000 ramettes de papier par an, on envisage des restrictions. On décide de diminuer la consommation de 250 ramettes par an.
On appelle v_1 le nombre de ramettes consommées en 2011 soit un an après le début des restrictions, v_2 le nombre de ramettes en 2012 soit au bout de 2 ans …

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Quelle est la nature de la suite v ?
3. Calculer le nombre de ramettes qui seront consommées dix ans après le début des restrictions.
4. Au bout de combien d'années, la consommation de papier sera pour la première fois au-dessous de 2 400 ramettes ?

1) $V_0 = 7000$ nombre de ramettes utilisées en 2010.

$V_1 = V_0 - 250$
$= 7000 - 250$
$= 6750$

$V_2 = V_1 - 250$
$= 6750 - 250$
$= 6500$.

En 2011, on utilisera 6750 ramettes et en 2012, 6500 ramettes.

2) On passe d'un terme à l'autre en enlevant 250 donc la suite v est arithmétique de raison $r = -250$ et de 1er terme $V_0 = 6750$.

3) En 2020, le nombre de ramettes est V_{10}. $(2020 = 2010 + 10)$

$V_{10} = V_0 + 10 \times r$
$= 7000 + 10 \times (-250)$
$= 7000 - 2500$
$= 4500$

En 2020, on utilisera 4500 ramettes.

4) Grâce à la calculette, on a : $V_{18} = 2500$ et $V_{19} = 2250$
Donc en $2010 + 19 = 2029$, on consommera pour la 1ère fois moins de 2400 ramettes.