CHAPITRE 6 DERIVATION

I. Approche graphique du nombre dérivé :

1) Exercice:

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.

1) Tracer les tangentes à la courbe de f aux points A,B,C,D,E et F.
2) Quel semble être le lien entre la pente de la courbe et le sens de variation de la fonction f ?
   Si la tangente " monte ", la fonction f semble croissante.
   Si la tangente " descend ", la fonction f semble décroissante.
   Si la tangente est horizontale, la fonction f semble présenter un extrémum (maximum ou minimum)

3) Lire le coefficient directeur de chacune des tangentes tracées:

Rappel : Le coefficient directeur d'une droite est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Coefficient directeur de la tangente en A : $\frac{2}{1} = 2$

Coefficient directeur de la tangente en B : 0.
Une tangente horizontale a toujours un coefficient directeur nul.(qui vaut 0)

Coefficient directeur de la tangente en C : $\frac{3}{-1} = -3$

Coefficient directeur de la tangente en D : 0

Coefficient directeur de la tangente en E : $\frac{3}{1} = 3$

Coefficient directeur de la tangente en F : $\frac{3}{-1} = -3$

4) Quel semble être le lien entre le signe du coefficient directeur de la tangente et les variations de la fonction f ?

Si la tangente a un coefficient directeur positif, la fonction f semble croissante.
Si la tangente a un coefficient directeur négatif, la fonction f semble décroissante.
Si la tangente a un coefficient directeur nul, la fonction f semble présenter un extrémum.

5) Etablir les équations des tangentes tracées :

Equation de la tangente en A :

L'équation est de la forme $y = 2x + p$ car $m = 2$.
A $(-6 ; 1)$ est sur la tangente donc $1 = 2 \times (-6) + p$ donc $1 = -12 + p$ donc $p = 13$.
L'équation de la tangente en A est donc $y = 2x + 13$.

Equation de la tangente en B :

L'équation est de la forme $y = 0x + p$ car $m = 0$.
B $(-2 ; 6)$ est sur la tangente donc $6 = 0 \times (-2) + p$ donc $6 = 0 + p$ donc $p = 6$.
L'équation de la tangente en B est donc $y = 0x + 6$ donc $y = 6$.

Equation de la tangente en C :

L'équation est de la forme $y = -3x + p$ car $m = -3$.
C $(2 ; 0)$ est sur la tangente donc $0 = -3 \times 2 + p$ donc $0 = -6 + p$ donc $p = 6$.
L'équation de la tangente en C est donc $y = -3x + 6$.

Equation de la tangente en D :

L'équation est de la forme $y = 0x + p$ car $m = 0$.
D $(5 ; -3)$ est sur la tangente donc $-3 = 0 \times 5 + p$ donc $-3 = 0 + p$ donc $p = -3$.
L'équation de la tangente en D est donc $y = 0x - 3$ donc $y = -3$.

Equation de la tangente en E :

L'équation est de la forme $y = 3x + p$ car $m = 3$.
E $(8 ; 1)$ est sur la tangente donc $1 = 3 \times 8 + p$ donc $1 = 24 + p$ donc $p = -23$.
L'équation de la tangente en E est donc $y = 3x - 23$.

Equation de la tangente en F :

L'équation est de la forme $y = -3x + p$ car $m = -3$.
F $(12 ; 2)$ est sur la tangente donc $2 = -3 \times 12 + p$ donc $2 = -36 + p$ donc $p = 38$.
L'équation de la tangente en F est donc $y = -3x + 38$.

2) Définitions :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a est appelé nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

Exemples avec la courbe précédente :

$f'(-6) = 2$	$f'(-2) = 0$	$f'(2) = -3$	$f'(5) = 0$	$f'(8) = 3$	$f'(12) = -3$
car $m = 2$	car $m = 0$	car $m = -3$	car $m = 0$	car $m = 3$	car $m = -3$
au point A	au point B	au point C	au point D	au point E	au point F
d'abscisse -6	d'abscisse -2	d'abscisse 2	d'abscisse 5	d'abscisse 8	d'abscisse 12

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemples avec la courbe précédente :

Au point A d'abscisse -6 l'équation de la tangente est :

$y = f'(-6)(x - (-6)) + f(-6)$

On lit $f(-6) = 1$ et $f'(-6) = 2$

On remplace dans l'équation : $y = 2(x + 6) + 1$

On développe : $y = 2x + 12 + 1$

On réduit : $y = 2x + 13$

On constate que l'on obtient bien la même équation que dans la question 5) de l'exercice.