BACCALAURÉAT BLANC 2024 DE MATHÉMATIQUES

– SPÉCIALITÉ - MATHS –

Correction du sujet 1

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sujet 1

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *Le nom de votre professeur de Spécialité.*

Exercice 1

5 points

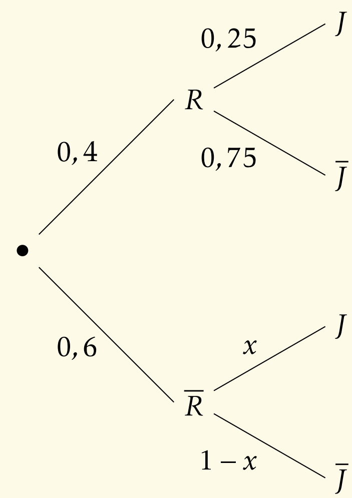
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;
J : « la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus » ».

Partie A

1 Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2 Déterminer la valeur exacte de x.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
p(J) &= p(R\cap J)+p\left(\overline{R}\cap J\right)\\
\Leftrightarrow 0,2 &= 0,4\times 0,25+0,6x\\
\Leftrightarrow 0,2 &= 0,4\times 0,25+0,6x\\
\Leftrightarrow 0,2 &= 0,4\times 0,25+0,6x\\
\Leftrightarrow 0,1 &= 0,6x\\
\Leftrightarrow x &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

3 Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.
On veut calculer :

$$\begin{aligned}
p_J(R) &= \frac{p(J\cap R)}{p(J)}\\
&= \frac{0,4\times 0,25}{0,2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1 Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On se justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.

On répète 500 fois, de façon indépendante,l'expérience « On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits achetée dans ce supermarché » qui comporte 2 issues :

- « la bouteille prélevée est une bouteille de pur jus » considéré comme succès, de probabilité $p = 0.2$
- « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0.8$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0.2$ notée $\mathscr{B}(500; 0.2)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 500$, on a

$$P(X = k) = \binom{500}{k} \times (0.2)^k \times (0.8)^{500-k}$$

2 Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
On veut calculer $P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) \approx 0,998$

[2nd] [DISTR] [B] [binomFRép(] [500] [,] [0.2] [,] [75] [)]

binomFRép$(500, 0.2, 75) \approx 0.0016$ Ceci calcule $P(X \leq 74)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(500; 0.2)$

La probabilité qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon soient pur jus est donc d'environ $99,8\%$.

3 Déterminer $E(X)$. Interpréter cette valeur.
Comme X suit une loi binomiale, on a $E(X) = np = 500 \times 0,2 = 100$.
Sur un lot de 500 bouteilles le nombre moyen de bouteilles de pur jus est de 100 bouteilles.

4 On considère qu'il y a n bouteilles de jus d'orange et non plus 500.
Déterminer le plus petit entier n tel que

$$P(X \geq 1) \geq 0,9999$$

On justifiera la réponse.

On considère que lesprélevements de bouteilles sont indépendants. On rappelle que la probabilité que la bouteille soit de pur jus est égale à $0,2$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) \geq 0,9999 \quad & \iff 1 - P(X \bar{\geq} 1) \geq 0,9999 \\
& \iff 1 - P(X < 1) \geq 0,9999 \\
& \iff 1 - P(X = 0) \geq 0,9999 \\
& \iff 1 - 0,8^n \geq 0,9999 \\
& \iff -0,8^n \geq -0,0001 \\
& \iff 0,8^n \leq 0,0001 \\
\text{soit par croissance de la fonction logarithme népérien :} \quad & \\
& \iff \ln\left(0,8^n\right) \leq \ln\left(10^{-4}\right) \\
& \iff n\ln(0,8) \leq -4\ln(10) \\
& \iff n \geq \frac{-4\ln 10}{\ln 0,8} \text{ (car } \ln 0,0,8 < 0\text{)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{-4\ln 10}{\ln 0,8} \approx 41,3$; le plus petit naturel solution est donc 42.

$$\boxed{\text{42 est le plus petit entier } n \text{ tel que } P(X \geq 1) \geq 0,9999}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1 **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
$f = uv + w$, donc $f' = u'v + v'u + w'$

$$\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= \ln x \\ w(x) &= -x-2 \end{cases} \quad \text{ainsi : } \begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \dfrac{1}{x} \\ w'(x) &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x =e. T a pour équation $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

✏ $f'(e) = \ln e = 1$

✏ $f(e) = e\ln(e) - e - 2 = e - e - 2 = -2$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 1(x-e) - 2, \text{ soit } y = x - e - 2}$$

c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
$f'(x) = \ln x$ d'où $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.
Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a $x > 0$ d'où $\dfrac{1}{x} > 0$, ce qui prouve $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } f \text{ est convexe sur l'intervalle }]0\,;\,+\infty[.}$$

d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
Comme f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$, on peut affirmer que la la tangente T au point d'abscisse x =e est située en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur cet intervalle .

2 **a.** Calculer la limite de la fonction f en 0.
On utilise la limite de référence : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\ x\ln x = 0 \\ &\lim_{x\to 0}\ -x-2 = -2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to 0}\ f(x) = -2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\ f(x) = -2}$$

b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

- On factorise par x :

$$f(x) = x\left(\ln x - 1 - \frac{2}{x}\right)$$

- On utilise la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 - \dfrac{2}{x} + \ln x\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- On étudie le signe de la dérivée $f'(x) = \ln x$

$$\begin{array}{ll|ll} f'(x) = 0 & \iff \ln x = 0 & f'(x) > 0 & \iff \ln x > 0 \\ & \iff x = 1 & & \iff x > 0 \end{array}$$

- On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.

- Sur l'intervalle $]0;1]$, f est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to 0} = -2$, donc $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0;1]$.
- D'après le théorème de la bijection :

✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[1;+\infty[$.
✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $[1;+\infty[$.
✍ $f(1) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
✍ f réalise donc une bijection de $[1;.+\infty[$ sur $[-3;+\infty[$
Comme $0 \in [1;.+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[1;+\infty[$.

b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.
$f(4.3) \approx -0;03$ et $f(4.4) \approx 0;12$

$$f(4.3) < 0 < f(4.4)$$
$$f(4.3) < f(\alpha) < f(4.4)$$
$$4.3. < \alpha < 4.4$$

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $f(x)$		-	0	$+$	

On déduit ainsi le signe de $f(x)$ sur l'intervalle d'étude :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

"

5 On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

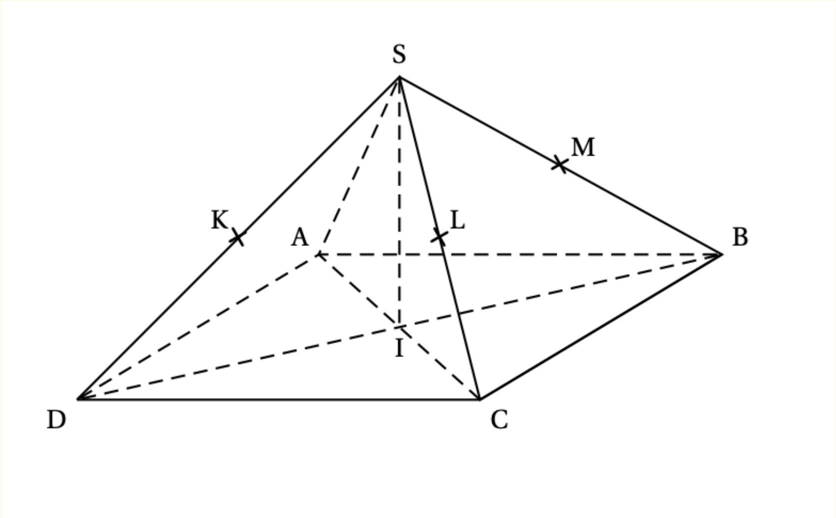
```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` , la valeur renvoyée est 4.32.
En effet $f(4.31) < 0$ et $f(4.32) > 0$

$$\boxed{\text{On peut donc affirmer } \alpha \in]4.31; 4.32[}$$

Exercice 3

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1 Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2 Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\begin{pmatrix}x_S-x_A\\y_S-y_A\\z_S-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

4 Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

b. $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

d. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(AS) &\iff \overrightarrow{SX}=t\overrightarrow{AS}\\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}\end{aligned}$$

Réponse c.

5 P est le point tel que $\overrightarrow{IP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IA}$

Une représentation paramétrique de la droite (LP) est :

a. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+5k \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2}+2k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

b. $\begin{cases} x = \frac{3}{4}-5k \\ y = 0 \\ z = -2k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

c. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+10k \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2}+4k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

d. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+5k \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2}+k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

On cherche les coordonnées de P

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{IP}}=\tfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{IA}} &\iff \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}=\tfrac{3}{4}.\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases} x=-\frac{3}{4}\\ y=-0\\ z=0\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{P}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{L}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ puis $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\\0-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Déjà la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+5k \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2}+2k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$ passe par L (faire $k=0$)

Par ailleurs cette droite est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}=-4\overrightarrow{LP}$.

$\boxed{\text{Réponse a.}}$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1 Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$

sur $[0;+\infty[$ f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $[0;+\infty[$:

$\begin{cases} u(x) &= 3x \\ v(x) &= 1+2x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(1+2x) - 2(3x)}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{3}{(1+2x)^2} \end{aligned}$$

Or $3 > 0$ et sur $[0;+\infty[$, on a $(1+2x)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } [0;+\infty[.}$

2 **a.** Calculer u_1 et u_2.

- $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3 \times \frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3 \times \frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.
Notons $\pi(n)$ la propriété $0 < u_n < 1$

- ☐ Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- ☐ Hérédité : soit $k \geq 0$, on suppose que $0 < u_k < 1$, on doit prouver que $0 < u_{k+1} < 1$.
  Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_k < 1$; par stricte croissance de la fonction f sur $[0;1]$, on déduit
  $f(0) < f(u_k) < f(1)$ ou car $f(1) = \dfrac{3}{3} = 1$ et $f(0) = 0$,
  $0 < u_{k+1} < 1$: la relation est donc vraie au rang $k+1$.
- ☐ Conclusion : $\pi(0)$ est vraie et $\pi(n)$ est héréditaire : d'après le principe de récurrence

$\boxed{\text{pour tout naturel } n, \quad 0 < u_n < 1.}$

3 **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\ &= \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} \\ &= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} \end{aligned}$$

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
Comme on sait que tous les termes de la suite sont strictement positifs (question 2.b.), on déduit que $1 + 2u_n > 0$ et $2u_n > 0$.
Par ailleurs comme pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n < 1$, on déduit que $1 - u_n > 0$.
Donc pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle est donc convergente.

> Toute suite croissante et majorée est convergente.

4 Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n}{1+2u_n} - \dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1-u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n} \\ &= \frac{3u_n}{1-u_n} \\ &= 3\frac{u_n}{1-u_n} = 3v_n \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ayant pour tout entier } n\ v_{n+1} = 3v_n \text{ ; la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 3.}}$

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

Comme (v_n) est géométrique, $v_n = q^n \times v_0$, ici $q = 3$ et $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi } v_n = 3^n.}$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n}{1-u_n} &\iff (1-u_n)v_n = u_n \\ &\iff v_n - u_n v_n = u_n \\ &\iff v_n = u_n + u_n v_n \\ &\iff v_n = u_n(1+v_n) \\ &\iff u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \text{ avec } v_n = 3^n \\ &\iff u_n = \frac{3^n}{1+3^n} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi pour tout entier naturel } n,\ u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}.}$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
On factorise par le terme prépondérant :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{3^n+1} \\ &= \frac{3^n}{3^n\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)} \\ &= \frac{3^n}{3^n\left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)} \end{aligned}$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$

$\boxed{\text{Ainsi } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

5 On considère la fonction en langage python suivante :

```
def limite(p) :
    u=0.5
    n=0
    while u<1-10**( -p) :
        u=3*u/(1+2*u)
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console limite(2) ?

En tapant dans la console limite(2), on obtient n=5. En effet $u_4 \approx 0,988 =$ et $u_5 \approx 0,996$.

b. Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entrée en argument ?

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang or la condition u<1-10^{-p} signifie que tant que u $\notin$]1-10^{-p} ; 2[, on calcule le terme de la suite suivant . Cet intervalle contenant 1 , on sait que tôt ou tard un sera dans cet intervalle .

A noter que l'on peut choisir un autre valeur que 2 dans l'intervalle car on sait que $u_n < 1$.