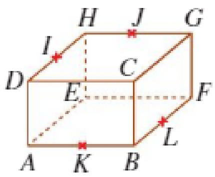
FICHE 4 L'espace et les équations paramétriques de droites

Exercice 1:

Dans toutes les questions, on considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$



1 $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FK}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{FG}$ (b) $\overrightarrow{AE}$ (c) $\vec{0}$

2 $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CG}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{BD}$ (b) $\overrightarrow{CH}$ (c) $\vec{0}$

3 $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EG}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{CG}$ (b) $\overrightarrow{GC}$ (c) $\vec{0}$

4 $\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LF}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{HF}$ (b) $\overrightarrow{HL}$ (c) $\overrightarrow{BL}$

5 $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{EA}$ est égal à :
(a) $\vec{0}$ (b) $\overrightarrow{IL}$ (c) $\overrightarrow{IC}$

6 Les droites (IJ) et (AF) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) sécantes.

7 Les droites (DB) et (EF) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) sécantes.

8 Les droites (IC) et (AB) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) parallèles.

9 Les plans (DCG) et (EAF) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

10 Les plans (IJA) et (HDC) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

11 Les plans (IJE) et (CKL) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

12 La droite (IJ) est parallèle :
(a) au plan (ABF).
(b) au plan (BCG).
(c) au plan (DHF).

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Dans toutes les affirmations, on considère la figure plus haut.

1 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont coplanaires.

2 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires.

3 Les droites (AB) et (HD) ont même vecteur directeur.

4 Les droites (BE) et (HC) ont même vecteur directeur.

5 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur de (DE).

6 $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur directeur de (AB).

7 Les plans (ABC) et (IEF) ont mêmes vecteurs directeurs.

8 Les plans (ADG) et (ACD) ont mêmes vecteurs directeurs.

9 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur du plan (ABF).

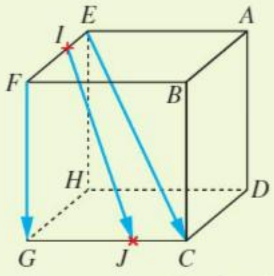
10 $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (CDG).

11 $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{DG})$ est une base du plan (CDG).

Exercice 2:

45 min

ABCDEFGH est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

Exercice 3:

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

VRAI FAUX Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Le point $A(6\,;-9\,;16)$ appartient à Δ.

2 **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et passant par le point $C(-10\,;81\,;25)$ est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 81 - 3t \\ z = 25 + 5t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

[redacted]

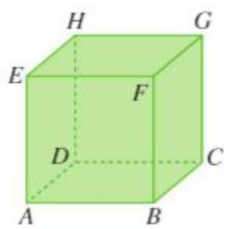
4 Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace telles que :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -55t + 32 \\ y = 5t \\ z = -11t + 356 \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

et $$\Delta_2 : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -11u \\ z = 2\,020 \end{cases}, \text{ où } u \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point.

5 On considère le cube *ABCDEFGH* ci-contre. On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{AD}\,; \overrightarrow{AE})$.



Affirmation : Une représentation paramétrique de la droite (FD) est :

$$\begin{cases} x = -20t \\ y = 20t + 1 \\ z = -20t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

1 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. Pour chacune de ces droites, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur.

1. $d_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 22 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 22t \end{cases}$

2. $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -11 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -44 + 5t \end{cases}$

3. $d_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

4. $d_4 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t + 3 \end{cases}$

4 Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, donnés ci-dessous.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

1. $A(-2;4;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $A(5;0;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $A(-7;8;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. $A(16;4;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

7 **Calculer**

On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Les points suivants appartiennent-ils à $\mathcal{D}$? Justifier.

1. $C(0;-1;4)$
2. $D(7;4;3)$
3. $E(-5;8;-1)$
4. $F\left(\frac{11}{2};\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$

8 On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -11 - t \end{cases}$$

1. Justifier que les points $A(-5;11;-7)$ et $B(9;-3;-21)$ appartiennent à Δ.
2. Les points A et B sont-ils alignés avec le point $C(-4;4;6)$?
3. Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?
4. Proposer une autre méthode pour justifier la réponse donnée à la question 3.

10 **Chercher, communiquer**

On considère les droites d_1 et d_2, dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -8t - 1, t \in \mathbb{R}; \\ z = 6t - 22 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t' + 1 \\ y = 4t' \quad , t' \in \mathbb{R}. \\ z = -3t' + 3 \end{cases}$$

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.
2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles :
a. parallèles ?
b. coplanaires ?
c. confondues ?