FICHE DE REVISIONS 3 Les suites

Exercice 1 :

Polynésie 4 mai 2022 Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. **a.** Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Exercice 2 :

Polynésie 5 mai 2022 Exercice 3

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Exercice 4 :

Amérique du sud 26 septembre 2022 Jour 2 Exercice 3

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000\,(1 + 0,9^n)$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).
   a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.
   Justifier la réponse par un calcul.
   b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
   Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

<u>Exercice 5 :</u> Plus difficile mais donné au bac !

Métropole Réunion Mayotte 11 septembre 2020 Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

La suite (v_n) est définie par :
$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. Vérifier que l'on a $v_2 = \dfrac{2}{3}$ puis calculer v_3.

2.

On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Recopier et compléter sur la copie cet algorithme afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul définie par l'utilisateur. Aucune justification n'est attendue.

	Algorithme
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$\quad U \leftarrow \dfrac{\ldots(\ldots+2)}{(\ldots+1)^2}$
4.	$\quad V \leftarrow \ldots$
5.	Fin Pour

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.

4. **a.** Montrer que la suite (v_n) est décroissante

b. Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).

5. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).