LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connait le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de e^x		+	
variations de e^x	0	a	$+\infty$

Soit a un réel strictement positif.

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $a \in \left] 0 ; +\infty \right[$.

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^{\alpha} = a$.

Ce réel α sera appelé logarithme népérien de a.

Conclusion : $\mathbf{e^x = a}$ **avec** $\mathbf{a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a}$.

Exemples : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1)$ Or $e^0 = 1$ donc $\mathbf{\ln(1) = 0}$

$e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e)$ Or $e = e^1$ donc $\mathbf{\ln(e) = 1}$

2) Conséquences algébriques :

$\mathbf{e^x = a}$ **avec** $\mathbf{a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a}$ **donc** $\mathbf{e^{\ln a} = a}$ **et** $\mathbf{x = \ln e^x}$

On en déduit que :

$\mathbf{e^{\ln x} = x}$ **pour tout** $\mathbf{x > 0}$ **et** $\mathbf{\ln(e^x) = x}$ **pour tout réel** $\mathbf{x}$.