CHAPITRE 8 CONTINUITE

I. Notion de continuité :

1) Définition :

a) Continuité en un point et sur un intervalle :

On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue en un point a de I si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On dira qu'une fonction f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout réel a de I.

b) Conséquence graphique :

Si une fonction est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

c) Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions usuelles (ou de référence) sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.
Toutes les fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles, par opérations (somme, différence, produit , quotient) ou composition sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.

2) Continuité et dérivabilité :

Propriété admise : **Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I.**
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

ATTENTION : La réciproque est fausse !

La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty [$ mais pas dérivable en 0.

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Continuité en 0 :
$f(0) = 0$ donc f est définie en 0 donc f est continue sur $[0 ; +\infty [$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\ (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Quand h tend vers 0 , $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

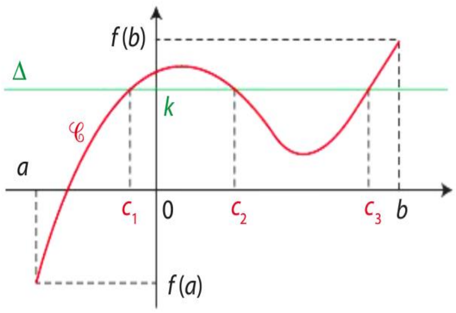
0 est une valeur interdite de $f'(x)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

f est donc dérivable sur $] 0 ; +\infty [$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires :

1) Théorème (admis) :

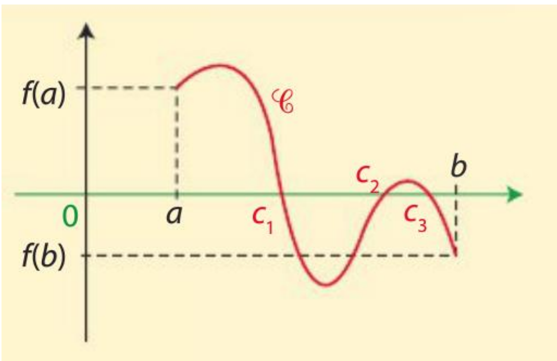
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.
Donc : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.
$f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre f(a) et f(b).



x	a	c_1	c_2	c_3	b
variations de f	f(a)	↗ k	↘ k	↗ k	f(b)

<u>Conséquence graphique :</u> la droite d'équation y = k coupe au moins une fois la courbe représentative de f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.

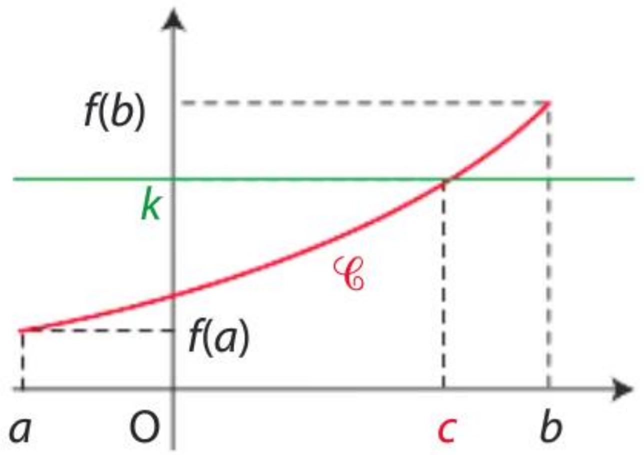
<u>Cas particulier</u> : k = 0.
Pour montrer que 0 est compris entre f(a) et f(b) on peut dire que :
f(a) et f(b) sont de signes contraires ou que le produit $f(a) \times f(b)$ est alors négatif.
Si c'est le cas, on en déduira qu'il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = 0.



2) Cas des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle :

<u>Théorème de la valeur intermédiaire :</u>
Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle [a ; b].

Exemple: si f est strictement croissante sur [a ; b].



x	a	**c**	b
variations de f	f(a)	k	f(b)

<u>Remarque :</u> Si f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur [a ; b] on dit qu'elle réalise une bijection de l'intervalle [a ; b] sur l'intervalle [f (a) ; f (b)] (respectivement [f (b) ; f (a)]).
C'est pourquoi ce théorème porte aussi le nom de théorème de la bijection.
La fonction, qui, a tout réel k compris entre f (a) et f (b), associe son unique antécédent, est la fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

<u>Convention :</u> **Les flèches d'un tableau de variation indiquent la continuité et la stricte monotonie de la fonction** .

<u>Exemple</u> : Soit f la fonction définie sur [– 5 ; 5] par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [– 5 ; 5].

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3) - 2x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+6}{(x^2+4)^2} = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+4)^2} = \frac{2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x^2+4)^2}$$

$(x^2+3)^2 > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$.

x	-5		$-\sqrt{3}$		α		$\sqrt{3}$		β		5
signe de $3-x^2$		$-$	0		$+$		0		$-$		
signe de $f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$		
variations de f	$-\dfrac{5}{14}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	↗	$0{,}4$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$0{,}4$	↘	$\dfrac{5}{14}$

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}4$ admet exactement deux solutions α et β dont on déterminera un encadrement à 10^{-2} près.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-5 ; -\sqrt{3}]$

Le maximum de f sur cet intervalle est $-\dfrac{5}{14} \approx -0{,}357$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il n'existe aucune solution à l'équation $f(x) = 0{,}4$ dans $[-5 ; -\sqrt{3}]$.

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}577$; $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$ et $0{,}4 \in [-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}]$.
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$ tel que $f(\alpha) = 0{,}4$.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{3} ; 5]$.
$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$; $f(5) = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$ et $0{,}4 \in [\frac{5}{14} ; \frac{\sqrt{3}}{3}]$.
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel β appartenant à $[\sqrt{3} ; 5]$ tel que $f(\beta) = 0{,}4$.

Donc sur $[-5 ; 5]$ $f(x) = 0{,}4$ admet exactement deux solutions.
D'après la calculette, $0 < \alpha < 1$; $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$; $0{,}69 < \alpha < 0{,}70$
$4 < \beta < 5$; $4{,}3 < \beta < 4{,}4$; $4{,}30 < \beta < 4{,}31$

3) Extension du théorème de la valeur intermédiaire à des intervalles non fermés ou non bornés :

• $I = [a ; +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	a	c	$+\infty$
f	$f(a)$	k	$+\infty$

Pour tout nombre réel $k \geqslant f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a ; +\infty[$.

• $I = [a ; b[$

$\lim_{x \to b} f(x) = \ell$

x	a	c	b
f	$f(a)$	k	ℓ

Pour tout nombre réel k dans $[f(a) ; \ell[$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a ; b[$.

• $I =]-\infty ; b[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et

$\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	c	b
f	ℓ	k	$-\infty$

Pour tout nombre réel $k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $]-\infty ; b[$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 5) - 3e^x(e^x)}{(e^x + 5)^2} = \frac{3e^{2x} + 15e^x - 3e^{2x}}{(e^x + 5)^2} = \frac{15e^x}{(e^x + 5)^2}$$

$(e^x + 5)^2 > 0$ et $15e^x > 0$ donc $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	
variations de f	0	2	3

$\lim_{x \to -\infty} 3e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x + 5 = 5$ donc par quotient $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5} = \frac{3e^x}{e^x(1+\frac{5}{e^x})} = \frac{3}{1+\frac{5}{e^x}}$$

$\lim_{x \to +\infty} 3 = 3$ et $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{e^x} = 1$ donc par quotient $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-1} près.

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ et $2 \in [0; 3]$.
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 2$.

D'après la calculette, $2 < \alpha < 3$; $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$; $2{,}30 < \alpha < 2{,}31$ donc $\alpha \approx 2{,}3$

III. Applications :

1) Résolution d'équations :

Le théorème de la valeur intermédiaire va permettre de justifier de l'existence et du nombre de solutions d'une équation. On pourra ensuite en donner des valeurs approchées grâce à la calculette.

Exemple :

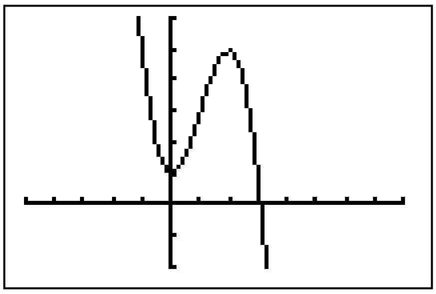
Montrer que l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2 ; 4]$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution.

On pose $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ et on étudie cette fonction sur $[2 ; 4]$.
f est continue sur $[2 ; 4]$ comme somme de fonctions polynômes continues sur $[2 ; 4]$.
$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Sur $[2 ; 4]$ $3x > 0$ et $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ donc sur $[2 ; 4]$ $-x + 2 < 0$

Tableau de variations :

x	2	α	4
signe de $3x$		$+$	
signe de $-x + 2$		$-$	
signe de $f'(x)$	0	$-$	
variations de f	5	0	-15



La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; 4]$.
$f(2) = 5$ et $f(4) = -15$. $0 \in [-15 ; 5]$.
Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel α appartenant à $[2 ; 4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
α est l'unique solution de l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$.

Pour encadrer α à 10^{-2} près on utilise la table de la calculette.

On sait que $2 < \alpha < 4$.

Avec un pas de 0,1 on a $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$.

X	Y1
2.8	2.568
2.9	1.841
3	1
3.1	.039
3.2	-1.048
3.3	-2.267
3.4	-3.624

Y1=.039

Avec un pas de 0,01 on a **$3{,}10 < \alpha < 3{,}11$** .

X	Y1
3.05	.53488
3.06	.43818
3.07	.34026
3.08	.24109
3.09	.14067
3.1	.039
3.11	-.0639

Y1=.039

On en déduit donc que $\alpha \approx 3{,}1$ à 10^{-1} près.

Remarque :

Pour pouvoir donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α ,
il faudra trouver un encadrement à 10^{-2} près de α.

2) Suites et continuité :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
(u_n) est une suite de termes appartenant à I.
a est un réel appartenant à I.
Si (u_n) est une suite convergente vers a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{4n}{n+1}$.

f est la fonction définie sur $[\,0 \,;+\infty\,[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

$4n \geq 0$ et $n + 1 \geq 0$ donc $u_n \geq 0$

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$u_n = \frac{4n}{n+1} = \frac{4n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{1+\frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

La suite (u_n) est convergente de limite 4.

3) On pose (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = f(u_n)$.
Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

Sur $[\,0 \,;+\infty\,[$ la fonction f est continue (fonction de référence).
pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ donc $u_n \in [\,0 \,;+\infty\,[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.
donc la suite $v_n = f(u_n)$ est convergente de limite $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

3) Théorème du point fixe :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I.

(u_n) est une suite de premier terme u_0 appartenant à I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
ℓ est un réel appartenant à I.

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{3}$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

Posons : (P_n) la propriété : " pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ "

Initialisation

Pour n = 0, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = 2$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$
donc la propriété est vraie pour $n = 0$. P_0 est vraie.

Hérédité

On suppose qu'il existe un certain entier k, tel que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6$.
On veut montrer qu'alors $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6$.

Par définition de la suite, $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_{k+2} = f(u_{k+1})$.
La fonction f étant continue, on a :

$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6$ donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(6)$
$2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$
donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6$

Si P_k est vraie pour un certain k , alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout n.
On a donc, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera ℓ.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 6
donc elle est convergente.

4) Déterminer la valeur de ℓ.

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 2 = x \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \Leftrightarrow x = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

Donc la suite (u_n) est convergente de limite 3.