LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connait le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de e^x	
variations de e^x	

Soit a un réel strictement positif.

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $a \in]\,0\,;+\infty\,[$.

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^{\alpha} = a$.

Ce réel α sera appelé logarithme népérien de a.

Conclusion : **$e^x = a$ avec $a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a$.**

Exemples : $e^x = 1 \Leftrightarrow$ ………………… Or $e^0 =$ ……… donc ……………………………….

$e^x = e \Leftrightarrow$ …………………. Or $e =$ ……… donc ……………………………….

2) Conséquences algébriques :

$e^x = a$ avec $a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a$ donc $a =$ ………………. et $x =$ ……………………..

On en déduit que :

$e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .

Exemples : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{6-3x} = 8$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x+7} = -5$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$

II. Etude de la fonction ln:

1) Définition de la fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \ln x$.

2) Dérivabilité et continuité de la fonction ln:

La fonction **ln est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**
Toute fonction dérivable étant continue, **la fonction ln sera continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**

De plus $x = e^{\ln x}$ pour $x > 0$ donc $(x)' = (e^{\ln x})'$ donc $1 = (\ln x)'\, e^{\ln x}$ donc $1 = (\ln x)' \times x$

donc $\boldsymbol{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$ **pour $x > 0$** .

3) Sens de variation :

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $(\ln x)' > 0$

donc la fonction **ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.**

x	0 ||	$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$	|| $+$	
variations de la fonction ln	|| $-\infty$ ↗	$+\infty$

4) Limites de la fonction ln :

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ **(admise)** **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ **(admise)**

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

Démonstration :

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ **pour n entier naturel, n> 0**

Démonstration :

5) Signe de la fonction ln :

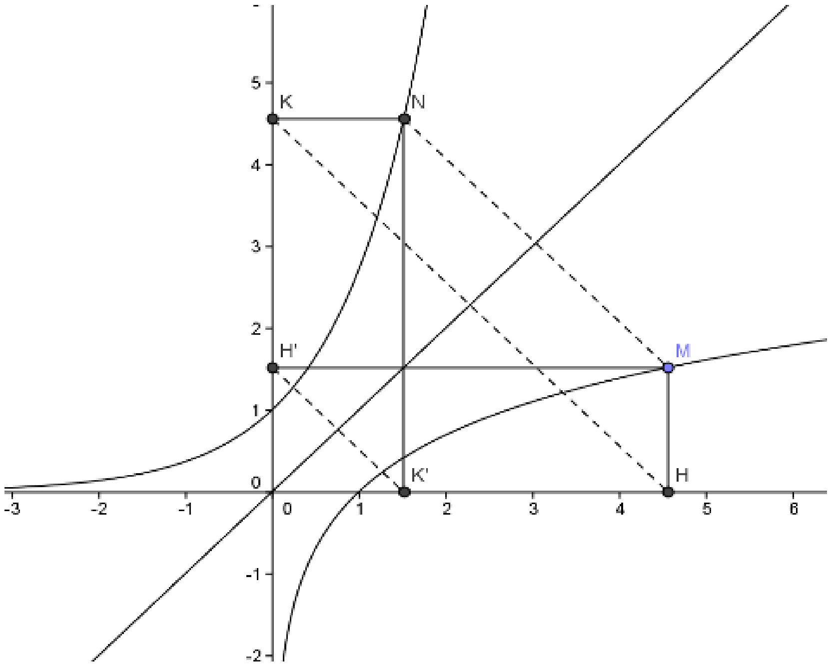
x	0		1		$+\infty$
ln (x)	‖	↗	0	↗	
Signe de ln(x)	‖	–	0	+	

La fonction ln est strictement sur] 0 ; + ∞ [
et s'annule pour x = 1
donc

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\,0\,;\,1\,[$
$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\,1\,;\,+\infty\,[$

6) Conséquences graphiques :

a) Dans un repère orthonormal, la courbe de la fonction ln et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x (la première diagonale).



b) On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

c) $f(x) = \ln x$; $f\,'(x)$ = ………. et $f\,''(x)$ = ……………. donc $f\,''(x)$ …………………………..

donc f est ………………………….. sur] 0 ; + ∞ [.

La fonction logarithme népérien est concave sur] 0 ; + ∞ [.

III. Relations fonctionnelles de la fonction ln:

Elles découlent des propriétés de la fonction exponentielle.

1) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$.**

2) **Pour tout $a > 0$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.**

3) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**

4) **Pour tout $a > 0$ et n entier relatif, $\ln(a^n) = n \ln a$.**

5) **Pour tout $a > 0$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$**

IV. Etude de la fonction ln(u(x)):

1) Ensemble de définition:

ln (u(x)) n'existe que si u(x) > 0 donc
Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction ln (u(x))
il faut résoudre l'inéquation u(x) > 0.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble de définition de la fonction ln (u(x)).

Exemple : Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

2) Dérivée de la fonction ln(u(x)) :

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I alors la fonction ln(u(x)) est dérivable sur I et on a : $$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple : Etudier sur $]-\infty\,;\frac{3}{5}[$ la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

Calcul de la dérivée :

.

Signe de $f'(x)$:

Remarque : **La fonction $x \longrightarrow \ln(u(x))$ a les mêmes variations que la fonction u.**

Tableau de variations :

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Limites :

3) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction ln:

La fonction ln étant strictement croissante sur $] 0 ; + \infty [$ on a :

Si $x > 0$ et si $y > 0$

$\ln x = \ln y \Leftrightarrow$ ……………………………

$\ln x > \ln y \Leftrightarrow$ ………………………………

Exemples :

1) Résoudre $\ln(2x - 3) = \ln (5 - x)$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

On résout ensuite l'équation de départ :

Il faut ensuite vérifier que la solution est dans l'ensemble de définition

2) Résoudre $\ln(\frac{1}{3} x - 5) \leq 2$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation :

On résout ensuite l'inéquation de départ :

Il faut ensuite prendre uniquement les solutions qui sont dans l'ensemble de définition

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $0{,}5^n \leq 0{,}003$