



 Exercice 4

12 pts On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

**1** Calculer  $u_1$  et vérifier que  $u_2 = 9\,415$ .

**2** a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n > 4\,000.$$

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**3** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_n - 4\,000$ .

a. Calculer  $v_0$ .

b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à  $0,95$ .

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$ ? Justifier la réponse.

**4** En 2020, une espèce animale comptait  $10\,000$  individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de  $5\%$  chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire  $200$  individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

# CORRECTION

## Exercice 1 2CM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes après le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité  $3^n + 2 \times 3^n$  est égal à :

a.  $3^n(3^n + 2)$

b.  $3^n + 5^n$

c.  $3^{n+1}$

$$\begin{aligned} 3^n + 2 \times 3^n &= 3^n + 2 \times 3^{\times 1} \\ &= 3^n \times (2 + 1) \\ &= 3 \times 3^n \\ &= 3^{n+1} \end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

1 pt **2** Si la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$  :

a.  $u_1 = 5$

b.  $u_2 = 200$

c. La suite  $(u_n)$  est croissante.

On a  $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$ , d'où on déduit  $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2$ .

Ainsi pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n^2 \geq 0$  car le carré d'un réel est toujours positif.

En multipliant par  $2 > 0$ , on a pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

Ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est croissante.

La bonne réponse est c.

1 pt **3** Si la suite  $(u_n)$  est géométrique alors on peut avoir :

a.  $u_n = (n+1)^2$

b.  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

Si la suite  $(u_n)$  est géométrique alors pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = qu_n$ , où  $q$  désigne une constante. Or dans le c. , on a  $u_{n+1} = -u_n = -1 \times u_n$

La bonne réponse est c.

1 pt **4** Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique alors on peut avoir :

a.  $u_n = n^2 + 3$

b.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c.  $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique alors pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} - u_n = r$  où  $r$  désigne une constante. Or dans le c. , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}(n+1) - 3 - \left(\frac{3}{4}n - 3\right) \\ &= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} - 3 - \frac{3}{4}n + 3 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

1 pt **5** La limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de la suite de terme général  $u_n = \frac{1-4n}{n}$  est :

a. -1

b. -4

c.  $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1-4n}{n} &= \frac{n\left(\frac{1}{n} - 4\right)}{n} \\ &= \frac{1}{n} - 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$$

La bonne réponse est b.

### Exercice 2

10 pts On rédigera en détail, la détermination de chaque limite.

**1** Calculer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de la suite de terme général  $u_n = 2n^2 + 3n + 5$ .

$$\begin{aligned} u_n &= 2n^2 + 3n + 5 \\ &= n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$  on a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2 Calculer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de la suite de terme général  $v_n = \frac{n+2}{n^2+1}$ .

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n+2}{n^2+1} \\ &= \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

3 Calculer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de la suite de terme général  $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-n^2 - n + 1)$ .

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-n^2 - n + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times n^2 \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{n}} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= n\sqrt{n} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \frac{n \times \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

4 Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$   
Posons  $x_n = \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7} \\ &= \frac{e^n \left(-3 - \frac{6}{e^n}\right)}{e^n \left(2 + \frac{7}{e^n}\right)} \\ &= \frac{-3 - 6e^{-n}}{2 + 7e^{-n}} \end{aligned}$$

On remarque alors :  $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$  avec  $\frac{1}{e} \approx 0,37$ .

On utilise alors le résultat suivant :

**Propriété 1**

Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Comme  $-1 < \frac{1}{e} < 1$ , on déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$  ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

5 Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + 2 \right)$

On utilise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 &\leq (-1)^n \leq 1 \\ -\frac{1}{n} &\leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ en divisant par } n > 0 \\ -\frac{1}{n} + 2 &\leq \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{1}{n} + 2 \text{ en ajoutant } 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} + 2 &= 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 2 &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

### Exercice 3 Limite et comparaison

3 pts Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = 1 + \frac{\cos(n)}{e^n}$

1 Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$  :  $1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n}$   
On utilise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ -\frac{1}{e^n} &\leq \frac{\cos(n)}{e^n} \leq \frac{1}{e^n} \text{ en divisant par } e^n > 0 \\ 1 - \frac{1}{e^n} &\leq 1 + \frac{\cos(n)}{e^n} \leq 1 + \frac{1}{e^n} \text{ en ajoutant } 1 \\ 1 - e^{-n} &\leq u_n \leq 1 + e^{-n} \text{ car } \frac{1}{e^n} = e^{-n} \end{aligned}$$

2 En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 - e^{-n} &= -1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + e^{-n} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

On utilise le résultat obtenu à l'exercice 2, à savoir :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

12 pts On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

**1** Calculer  $u_1$  et vérifier que  $u_2 = 9\,415$ .

- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$ .
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$ .

$$u_1 = 9\,700 \text{ et on a bien } u_2 = 9\,415.$$

**2** a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n > 4\,000.$$

Montrons par récurrence sur  $n$  la propriété  $\pi(n)$  : «  $u_n > 4\,000$  ».

↳ **Initialisation :**

$$u_0 = 10\,000 \text{ et } 10\,000 > 4\,000$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

↳ **Hérédité :** soit  $k \geq 0$  un entier fixé. On suppose que  $u_k > 4\,000$ . (HR)

On veut prouver que  $u_{k+1} > 4\,000$

$$\begin{array}{ll} u_{k+1} = 0,95u_k + 200 & \\ u_k > 4\,000 & \text{d'après (HR)} \\ 0,95u_k > 0,95 \times 4\,000 & \text{en multipliant par } 0,95 > 0 \\ 0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200 & \text{en ajoutant } 200 \\ u_{k+1} > 400 & \text{car } 0,95 \times 4\,000 + 200 = 4\,000 \end{array}$$

↳ **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier  $n$ , on a «  $u_n > 4\,000$  ».

**b.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Méthode : On étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,95u_n + 200 - u_n \\ &= (0,95 - 1)u_n + 200 \\ &= -0,05u_n + 200 \\ &= -0,05(u_n - 4\,000) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} -0,05 < 0 \\ (u_n - 4\,000) > 0 \text{ car } u_n > 4\,000 \end{array} \right\} \text{ par produit on a } -0,05(u_n - 4\,000) < 0$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n < 0$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**c.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 4 000.

D'après le théorème de la convergence monotone, toute suite décroissante minorée est convergente,

ainsi la suite  $(u_n)$  est convergente.

**3** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_n - 4\,000$ .

**a.** Calculer  $v_0$ .

Pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$ .

$$v_0 = 6\,000$$

- b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95. Au choix :

Méthode 1 : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n.$$

L'égalité  $v_{n+1} = 0,95v_n$  vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a vu que  $u_n > 4000$ , donc  $v_n = u_n - 4000 > 0$ .

$$\text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$$

$$\frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel  $n$ , montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.

- c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

D'après le résultat précédent, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000.$$

- d. Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$ ? Justifier la réponse.

Comme  $-1 < 0,95 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4000$  (par somme de limites).

- 4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

$u_n$  est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang  $n$ ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.