Révisions DS2

<u>Exercice 1</u>: (3 points)

Une entreprise qui fabrique des cerfs-volants modélisé son coût total de production, en milliers d'euros, par la fonction :

$$C_T(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$$

où x est la quantité produite, en milliers de cerfs-volants, avec $0 \leq x \leq 6$.

2) Etudier les variations de la fonction C_T sur [0 ; 6].

<u>Exercice 2</u>: (11 points)

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

1) Calculer u_5 et le onzième terme.
2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$
3) En déduire la monotonie de la suite (u_n)
4) Montrer que la suite est majorée par 3.

<u>Exercice 3</u>: (6 points)

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}85\ U_n + 1{,}8$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.

2) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $V_n = U_n - 12$

   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,85. Préciser son premier terme V_0.

   b) Exprimer (V_n) en fonction de n .

   c) En déduire que $U_n = 12 - 4 \times 0{,}85^n$.

   d) Donner le sens de variation de (V_n), en déduire celui de (U_n). Justifier.

<u>Exercice 4</u>: (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

CORRECTION

Exercice 1 :

2) Dérivée: $\forall$ x$\in\mathbb{R}$, $C'_T(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Signe de $C'_T(x)$: On calcule le discriminant : $\Delta = \frac{9}{4}$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

x	0		1		6
signe de $C'_T(x)$		$-$	0	$+$	

Variations de C_T:

x	0		1		6
Variations de C_T	2	$\searrow$	$\frac{19}{12}$	$\nearrow$	62

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$

1) $u_5 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ Le onzième terme est u_{11} : $u_{11} = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+1}{n+1+1} - \frac{3n+1}{n+1} \\ &= \frac{3n+4}{n+2} - \frac{3n+1}{n+1} \\ &= \frac{(3n+4)(n+1) - (3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3n^2 + 7n + 4 - 3n^2 - 7n - 2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

3) Monotonie de la suite (u_n): Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\begin{cases} 2 > 0 \\ n+1 > 0 \\ n+2 > 0 \end{cases}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

4) u_n est majorée par 3 si , pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $3 > u_n \Leftrightarrow 3 - u_n > 0$

$3 - u_n = 3 - \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3(n+1) - (3n+1)}{n+1} = \frac{2}{n+1}$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\begin{cases} 2 > 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$ donc $3 - u_n > 0$ donc (u_n) est majorée par 3.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}85\ U_n + 1{,}8$

1) $u_1 = 0{,}85 \times 8 + 1{,}8 = 8{,}6$; $u_2 = 9{,}11$; $u_3 = 9{,}5435$

2) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $V_n = U_n - 12$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0{,}85\ u_n + 1{,}8 - 12 = 0{,}85\ u_n - 10{,}2 = 0{,}85\ (u_n - 12) = 0{,}85\ v_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,85et de premier terme $v_0 = -4$

b) $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 0{,}85^n$

c) $\begin{cases} v_n = -4 \times 0{,}85^n \\ v_n = u_n - 12 \end{cases}$ donc $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0{,}85^n$

d) Sens de variation de (V_n):

Suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de 1er terme négatif donc (V_n) est croissante.

Sens de variation de (U_n): (U_n) a même sens de variation que (V_n) car $u_n = v_n + 12$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Soit P_n la propriété définie pour tout entier naturel n par " $u_n = 3 \times 2^n + 4$ "

Initialisation: $n = 0$

$3 \times 2^0 + 4 = 7 = u_0$ donc P_0 est vraie

Hérédité:

Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vraie c'est–à–dire que $u_k = 3 \times 2^k + 4$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie c'est à dire que $u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + 4$.

$u_{k+1} = 2\ u_k - 4 = 2\ (3 \times 2^k + 4) - 4 = 3 \times 2^{k+1} + 8 - 4 = 3 \times 2^{k+1} + 4$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion:

P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc pour tout entier naturel n , P_n est vraie c'est à dire que $u_n = 3 \times 2^n + 4$.