Nom, Prénom : ………………………………………………… **Mardi 5 Novembre 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°2

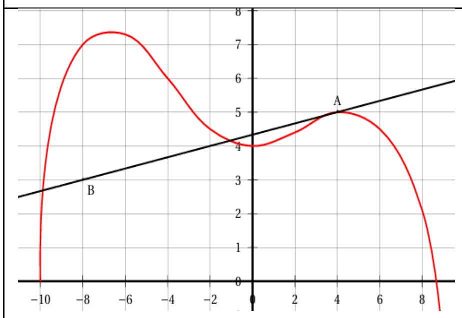
/40

2 points de bonus

Les élèves bénéficiant d'un tiers-temps ne traiteront pas les questions précédées d'un @.

Exercice 1: QCM *(7 points)*

Entourer la bonne réponse. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse n'enlève pas de point. L'absence de réponse n'est pas pénalisante. Aucune justification n'est attendue.

QUESTION	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+1}$.	$f'(x) = -2x\,e^{-x^2+1}$	$f'(x) = e^{-x^2+1}$	$f'(x) = (-x^2+1)\,e^{-x^2+1}$	$f'(x) = e^{-2x}$
Soit a un réel quelconque. $B = \dfrac{e^a \times e^{3-a}}{e}$	$B = e^{3a-a^2-1}$	$B = 7{,}39$	$B = a \times e^{3-a}$	$B = e^2$
 On donne la courbe représentative d'une fonction g et la tangente à cette courbe au point A, d'abscisse 4.	$g'(4) = 6$	$g'(4) = 0$	$g'(4) = \dfrac{1}{6}$	$g'(4) = 5$
Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 5$.	$u_{10} = 5120$	$u_{n+1} = -2 - u_n$	$u_{10} = -2560$	$u_{n+1} = u_n - 2$
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel par $v_n = 3 - \dfrac{1}{n^2+1}$.	La suite (v_n) est strictement décroissante	Le huitième terme vaut $\dfrac{194}{65}$	La suite (v_n) est minorée par 3.	$v_8 = \dfrac{194}{65}$
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 5$. On pose $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{31}$	$S \approx 1{,}54 \times 10^{15}$	$S = -841$	$S = -810$	$S = -783$
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 5$. On pose $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{31}$	$S \approx 1{,}54 \times 10^{15}$	$S \approx 4{,}63 \times 10^{15}$	$S \approx -4{,}63 \times 10^{15}$	$S \approx 2{,}78 \times 10^{16}$

Exercice 2: Vrai ou Faux. On justifiera avec soin la réponse. *(5 points)*

@1) On considère une suite (t_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8\,t_n + 18$ avec $t_0 = 2$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n, par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$ avec $v_1 = 2$.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$

(on pourra s'aider d'un raisonnement par récurrence)

Exercice 3 : *(6 points)*

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{0{,}5\,u_n^2 + 8}$ pour tout entier naturel n .

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 4: *(10 points)*

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2020.

On estime qu'au début de chaque année :

- 21% des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

A partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents, en milliers, la $n^{\text{ème}}$ année après le début de l'année 2020, par la suite (u_n).

1) Justifier que $u_0 = 90$.
2) Calculer le nombre d'adhérents au début de l'année 2021 et au début de l'année 2022.
3) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,79\, u_n + 29,4$.
4) A l'aide de la calculette, déterminer le plus petit entier naturel tel que $u_n > 135$.
5) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 140$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

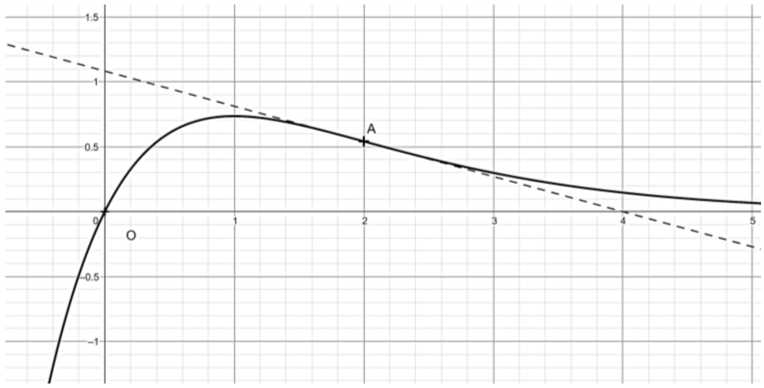
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

   c) La FFME peut-elle espérer dépasser les 140 000 adhérents ? Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 5 : *(14 points)*

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{-x}$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f'(x) = 2\,(1 - x)\,e^{-x}$
2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer le tableau de variations.
3) a) On donne la courbe représentative de la fonction f et la tangente à cette courbe au point A.



Grâce à cette courbe, conjecturer la convexité de la fonction f et la présence éventuelle de points d'inflexion.

b) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, préciser leurs coordonnées. Vos conjectures sont-elles validées ?

@Partie B :

1) Donner le tableau de variations de f sur [0 ; 1].
2) On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

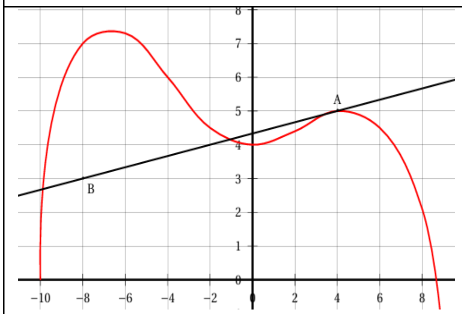
   a) Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

   b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

TSpé CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°2

Exercice 1: QCM *(7 points)*

Entourer la bonne réponse. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse n'enlève pas de point. L'absence de réponse n'est pas pénalisante. Aucune justification n'est attendue.

QUESTION	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^{-x^2+1}$. f est de forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2+1$ $f'(x) = -2x\, e^{-x^2+1}$	**$f'(x) = -2x\, e^{-x^2+1}$**	$\cancel{f'(x) = e^{-x^2+1}}$	$\cancel{f'(x) = (-x^2+1)\, e^{-x^2+1}}$	$\cancel{f'(x) = e^{-2x}}$
Soit a un réel quelconque. $B = \dfrac{e^a \times e^{3-a}}{e} = e^{a+3-a-1} = e^2$	$\cancel{B = e^{3a-a^2-1}}$	$\cancel{B = 7{,}39}$	$\cancel{B = a \times e^{3-a}}$	**$B = e^2$**
 On donne la courbe représentative d'une fonction g et la tangente à cette courbe au point A, d'abscisse 4. A(4 ; 5) et B (– 8 ; 3) $g'(4) = m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2}{-12} = \dfrac{1}{6}$	$\cancel{g'(4) = 6}$	$\cancel{g'(4) = 0}$	**$g'(4) = \dfrac{1}{6}$**	$\cancel{g'(4) = 5}$
Soit (u_n) une suite géométrique de raison – 2 et de premier terme $u_1 = 5$. $u_{n+1} = u_n \times q = -2\, u_n$ $u_{10} = u_1 \times q^{10-1} = 5 \times (-2)^9 = -2560$	$\cancel{u_{10} = 5120}$	$\cancel{u_{n+1} = -2 - u_n}$	**$u_{10} = -2560$**	$\cancel{u_{n+1} = u_n - 2}$
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel par $v_n = 3 - \dfrac{1}{n^2+1}$. v_0 est le premier terme donc le huitième terme est v_7. $v_8 = 3 - \dfrac{1}{8^2+1} = 3 - \dfrac{1}{65} = \dfrac{194}{65}$ $v_n < 3$ donc elle est majorée par 3 (v_n) est croissante (d'après la calculette)	~~La suite (v_n) est strictement décroissante~~	~~Le huitième terme vaut $\frac{194}{65}$~~	~~La suite (v_n) est minorée par 3.~~	**$v_8 = \dfrac{194}{65}$**
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison – 2 et de premier terme $u_1 = 5$. On pose $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{31}$ $S = \dfrac{u_3 + u_{31}}{2} \times (31 - 3 + 1)$ $= \dfrac{1 - 55}{2} \times 29$ $= -783$ $u_3 = u_1 + 2r = 5 - 4 = 1$ $u_{31} = 5 + 30r = 5 - 60 = -55$	$\cancel{S \approx 1{,}54 \times 10^{15}}$	$\cancel{S = -841}$	$\cancel{S = -810}$	**$S = -783$**
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 5$. On pose $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{31}$ $S = u_3 \times \dfrac{1 - q^{29}}{1 - q} = 45 \times \dfrac{1 - 3^{29}}{-2}$ $\approx 1{,}54 \times 10^{15}$ $u_3 = u_1 \times q^2 = 5 \times 3^2 = 45$	**$S \approx 1{,}54 \times 10^{15}$**	$\cancel{S \approx 4{,}63 \times 10^{15}}$	$\cancel{S \approx -4{,}63 \times 10^{15}}$	$\cancel{S \approx 2{,}78 \times 10^{16}}$

Exercice 2: Vrai ou Faux. On justifiera avec soin la réponse. *(5 points)*

1) On considère une suite (t_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0,8\, t_n + 18$ avec $t_0 = 2$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n, par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

$w_n = t_n - 10 \Leftrightarrow t_n = w_n + 10$

$w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0,8\, t_n + 18 - 10 = -0,8\,(w_n + 10) + 8 = -0,8\, w_n - 8 + 8 = -0,8\, w_n$

donc (w_n) est géométrique de raison $q = -0,8$ et de premier terme $w_0 = 2 - 10 = -8$

L'affirmation est vraie.

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$ avec $v_1 = 2$.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$

(on pourra s'aider d'un raisonnement par récurrence)

Posons pour tout n entier naturel non nul, P_n : " $v_n = \dfrac{n+1}{n}$ ".

Initialisation : $n = 1$ $v_1 = 2$ et $\dfrac{1+1}{1} = 2$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $v_k = \dfrac{k+1}{k}$.

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $v_{k+1} = \dfrac{k+2}{k+1}$

$$v_{k+1} = 2 - \frac{1}{v_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1) - k}{k+1} = \frac{2k+2-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .
L'affirmation est vraie.

Exercice 3 : *(6 points)*

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{0,5\, u_n^2 + 8}$ pour tout entier naturel n .

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0,5 \times 0 + 8} = \sqrt{8} \approx 2,8$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$.

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ donc $0^2 \leq (u_k)^2 \leq (u_{k+1})^2 \leq 4^2$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $0 \leq 0,5\ (u_k)^2 \leq 0,5\,(u_{k+1})^2 \leq 8$ car $0,5 > 0$

donc $8 \leq 0,5\ (u_k)^2 + 8 \leq 0,5\,(u_{k+1})^2 + 8 \leq 16$

donc $\sqrt{8} \leq \sqrt{0,5\, u_k^2 + 8} \leq \sqrt{0,5\, u_{k+1}^2 + 8} \leq 4$

car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty\, [$

donc $0 \leq \sqrt{8} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n non nul .

2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

On a démontré par récurrence que $\boldsymbol{u_n \leq u_{n+1}}$ pour tout entier naturel n non nul donc on peut en déduire que la suite (u_n) est croissante .

Exercice 4: *(10 points)*

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2020.

On estime qu'au début de chaque année :

- 21% des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

A partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents, en milliers, la $n^{ème}$ année après le début de l'année 2020, par une suite (u_n).

1) Justifier que $u_0 = 90$.

90 000 = 90 milliers donc début 2020, année 0, on a 90 milliers d'adhérents donc $u_0 = 90$

2) Calculer le nombre d'adhérents au début de l'année 2021 et au début de l'année 2022.

$90\,000 - \frac{21}{100} \times 90\,000 + 29\,400 = 100\,500$. **Début 2021, on aura 100 500 adhérents**.

$100\,500 - \frac{21}{100} \times 100\,500 + 29\,400 = 108\,795$. **Début 2022, on aura 108 795 adhérents**.

3) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,79\, u_n + 29,4$.

Pour calculer le nombre d'adhérents l'année n + 1, on multiplie le nombre d'adhérents l'année n par $\frac{79}{100} = 0,79$ car 21% des adhérents partent donc 79% restent.

Puis on ajoute les nouveaux adhérents en milliers soit 29,4 milliers.

4) A l'aide de la calculette, déterminer le plus petit entier naturel tel que $u_n > 135$.

D'après la calculette on a : $u_9 \approx 134,01$ et $u_{10} \approx 135,27$

donc **le plus petit entier naturel n tel que $\boldsymbol{u_n > 135}$ est n = 10.**

5) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 140$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

$v_n = u_n - 140 \Leftrightarrow u_n = v_n + 140$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 140 = 0,79\, u_n + 29,4 - 140 = 0,79\,(v_n + 140) - 110,6 = 0,79\, v_n + 110,6 - 110,6$

$= 0,79\, v_n$

donc **la suite $\boldsymbol{(v_n)}$ est géométrique de raison q = 0,79 et de premier terme $\boldsymbol{v_0 = 90 - 140 = -50}$**

b) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n = -50 \times 0,79^n}$ **et** $\boldsymbol{u_n = v_n + 140 = -50 \times 0,79^n + 140}$

c) La FFME peut-elle espérer dépasser les 140 000 adhérents ? Justifier avec soin votre réponse.

140 000 = 140 milliers donc il faut résoudre $u_n > 140$

$u_n > 140 \Leftrightarrow -50 \times 0,79^n + 140 > 140 \Leftrightarrow -50 \times 0,79^n > 0 \Leftrightarrow 50 \times 0,79^n < 0$

Or $0,79^n > 0$ pour tout entier naturel donc $50 \times 0,79^n$ ne peut pas être négatif.

La FFME ne pourra pas espérer dépasser les 140 000 adhérents.

Exercice 5 : *(14 points)*

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{-x}$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f'(x) = 2 (1 - x) e^{-x}$

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 2$ $v'(x) = - e^{-x}$

$f'(x) = 2 e^{-x} + 2x (- e^{-x}) = e^{-x} (2 - 2x) = e^{-x} \times 2(1 - x) = 2 (1 - x) e^{-x}$

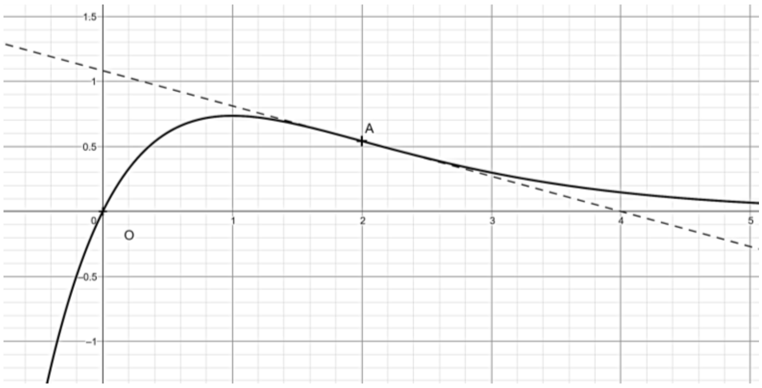
2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer le tableau de variations.

Signe de $f'(x)$: $2 > 0$; $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$

$1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$ donc sur $] - \infty ; 1 [$ $f'(x) > 0$ et f est croissante.

sur $] 1 ; + \infty [$ $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

3) a) On donne la courbe représentative de la fonction f et la tangente à cette courbe au point A.



Grâce à cette courbe, conjecturer la convexité de la fonction f et la présence éventuelle de points d'inflexion.

On observe que la courbe représentative de f semble

en-dessous de la tangente en A sur $] - \infty ; 2]$

et au-dessus de la tangente en A sur $[2 ; + \infty [$

donc f serait concave sur $] - \infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; + \infty [$.

La courbe de f présenterait un point d'inflexion en A(2 ; 0,5).

b) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ?
Si oui, préciser leurs coordonnées. Vos conjectures sont-elles validées ?

$f'(x) = 2 (1 - x) e^{-x}$

$f'(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2 - 2x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = - 2$ $v'(x) = - e^{-x}$

$f''(x) = - 2 e^{-x} + (2 - 2x)(- e^{-x}) = e^{-x} (- 2 - 2 + 2x) = e^{-x} \times (- 4 + 2x) = 2 (- 2 + x) e^{-x}$

Signe de $f''(x)$: $2 e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $- 2 + x$.

$- 2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Donc $f''(x) \geq 0$ sur $[2 ; + \infty [$ donc f est convexe sur $[2 ; + \infty [$

$f''(x) \leq 0$ sur $] - \infty ; 2]$ donc f est concave sur $] - \infty ; 2]$

f'' s'annule et change de signe en $x = 2$ donc la courbe représentative de f présente au point d'abscisse 2 un point d'inflexion. $f(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$ donc $A(2; 4e^{-2})$ est le seul point d'inflexion de la courbe représentative de f . Mes conjectures sont validées.

Partie B :

1) Donner le tableau de variations de f sur [0 ; 1].

x	0	1
signes de $f\,'(x)$	+	
variations de f	0 $\nearrow$	$\frac{2}{e}$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2\,e^{-1} = \frac{2}{e}$

2) On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ".

Initialisation : n = 0 $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(0{,}1) = 0{,}2\,e^{-0{,}2} \approx 0{,}18$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$

P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que

$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$.

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$.

$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$ donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(0{,}1)$

car f est croissante sur [0 ; 1]

donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq f(0{,}1) \leq 1$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

On a démontré par récurrence que $0 \leq \boldsymbol{u_n} \leq \boldsymbol{u_{n+1}} \leq 1$ pour tout entier naturel n non nul
donc on peut en déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée (minorée par 0 et majorée par 1)