

TSpé DM2 Facultatif
A rédiger pour le lundi 4 novembre 2024

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n + 2)$

b. $3^n + 5^n$

c. 3^{n+1}

2 Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$

b. $u_2 = 200$

c. La suite (u_n) est croissante.

3 Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$

b. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

4 Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c. $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

Exercice 2:

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2 a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3 Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0 .

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5% chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 3:

On donne la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$.

- 1) Etudier le sens de variation de g sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations.
- 2) On admet que $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 5]$. Grâce à la calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 3) Etudier la convexité de la fonction g sur \mathbb{R} .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.
- 5) La courbe représentative de g admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$? Si oui, en quel(s) point(s).

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) a) Etudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de f .
a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
- 2) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in [2 ; 5]$ pour tout entier $n \geq 1$.

CORRECTION

Exercice 1 :

1 La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n + 2)$

b. $3^n + 5^n$

c. 3^{n+1}

$$\begin{aligned}3^n + 2 \times 3^n &= 3^n + 2 \times 3^1 \\ &= 3^n \times (2 + 1) \\ &= 3 \times 3^n \\ &= 3^{n+1}\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

2 Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$

b. $u_2 = 200$

c. La suite (u_n) est croissante.

On a $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$, d'où on déduit $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2$.

Ainsi pour tout entier naturel $n : u_n^2 \geq 0$ car le carré d'un réel est toujours positif.

En multipliant par $2 > 0$, on a pour tout entier naturel $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

La bonne réponse est c.

3 Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$

b.
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$$

Si la suite (u_n) est géométrique alors pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = qu_n$, où q désigne une constante. Or dans le c. , on a $u_{n+1} = -u_n = -1 \times u_n$

La bonne réponse est c.

4 Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$

b.
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

c. $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

Si la suite (u_n) est arithmétique alors pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = r$ où r désigne une constante. Or dans le c. , on a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}(n+1) - 3 - \left(\frac{3}{4}n - 3\right) \\ &= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} - 3 - \frac{3}{4}n + 3 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$.
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$.

$$u_1 = 9\,700 \text{ et on a bien } u_2 = 9\,415.$$

2 a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n > 4\,000$ ».

▮ *Initialisation* :

$$u_0 = 10\,000 \text{ et } 10\,000 > 4\,000$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

▮ *Hérédité* : soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 4\,000$. (HR)

On veut prouver que $u_{k+1} > 4\,000$

$$\begin{array}{ll} u_{k+1} = 0,95u_k + 200 & \\ u_k > 4\,000 & \text{d'après (HR)} \\ 0,95u_k > 0,95 \times 4\,000 & \text{en multipliant par } 0,95 > 0 \\ 0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200 & \text{en ajoutant } 200 \\ u_{k+1} > 4\,000 & \text{car } 0,95 \times 4\,000 + 200 = 4\,000 \end{array}$$

▮ *Conclusion* : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n , on a « $u_n > 4\,000$ ».

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,95u_n + 200 - u_n \\ &= (0,95 - 1)u_n + 200 \\ &= -0,05u_n + 200 \\ &= -0,05(u_n - 4\,000) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} -0,05 < 0 \\ (u_n - 4\,000) > 0 \text{ car } u_n > 4\,000 \end{array} \right\}, \text{ par produit on a } -0,05(u_n - 4\,000) < 0$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

3 Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.

a. Calculer v_0 .

Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10\,000 - 4000 = 6\,000$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n.$$

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

$$\text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$$

$$\frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n , montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

D'après le résultat précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000.$$

4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 3 :

On donne la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$.

1) Etudier le sens de variation de g sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations.

$$g'(x) = -3e^{-3x} + 3 = 3(1 - e^{-3x})$$

$$\text{Signe de } g'(x) : 1 - e^{-3x} \geq 0 \iff 1 \geq e^{-3x} \iff e^0 \geq e^{-3x} \iff 0 \geq -3x \iff x \geq 0$$

| | | | |
|-------------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| signe de $g'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| variations de g | | | |

$$g(0) = e^0 + 0 - 5 = 1 - 5 = -4$$

2) On admet que $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 5]$. Grâce à la calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

A l'aide de la calculatrice on obtient **$1,66 < \alpha < 1,67$**

3) Etudier la convexité de la fonction g sur \mathbb{R} .

$$g''(x) = 9e^{-3x} \quad g''(x) > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ donc } \mathbf{\text{la fonction } g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}.$$

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.

$$y = g'(-\frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) + g(-\frac{1}{3}) \quad \text{avec } g(-\frac{1}{3}) = e^1 - 1 - 5 = e - 6 \quad \text{et } g'(-\frac{1}{3}) = 3(1 - e)$$

$$y = 3(1 - e)(x + \frac{1}{3}) + e - 6$$

$$y = 3(1 - e)x + 1 - e + e - 6$$

$$y = 3(1 - e)x - 5$$

5) La courbe représentative de g admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$? Si oui, en quel(s) point(s).

(d) a pour coefficient directeur 3 donc il faut résoudre $g'(x) = 3$

$$g'(x) = 3 \Leftrightarrow 3(1 - e^{-3x}) = 3 \Leftrightarrow 1 - e^{-3x} = 1 \Leftrightarrow e^{-3x} = 0$$

Or $e^{-3x} > 0$ donc $e^{-3x} = 0$ n'a pas de solution.

La courbe représentative de g n'admet pas de tangente parallèle à la droite (d).

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Etudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de f .

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = x^2 - x + 3$$

$x^2 - x + 3$ est un trinôme de discriminant $\Delta = 1 - 12 = -11$ donc $x^2 - x + 3 > 0$ sur \mathbb{R}

donc f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{donc } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{donc } f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}$$

$$2\sqrt{x^2 - x + 3} > 0 \quad \text{et} \quad 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

| | | | |
|-------------------|-----------|---------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| signe de $f'(x)$ | - | 0 | + |
| variations de f | | | |

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 3} = x \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = x^2 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \mathbf{S = \{3\}}$$

2) a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in [2; 5]$ pour tout entier $n \geq 1$.

On pose (P_n) la propriété : pour tout $n \geq 1$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$.

Initialisation : $n = 1$ $u_1 = 2$ et $u_2 = f(2) = \sqrt{5}$; $2 \leq 2 \leq \sqrt{5} \leq 5$ donc (P_1) est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe k entier, $k \geq 1$, tel que (P_k) soit vérifiée c'est-à-dire que $2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$.

Démontrons qu'alors (P_{k+1}) est vérifiée c'est-à-dire que $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$.

$2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$. f étant croissante sur $[2; 5]$ on a :

$$f(2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(5) \text{ donc } \sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23}.$$

$$\text{Or } \sqrt{5} > 2 \text{ et } \sqrt{23} < 5 \quad \text{donc } 2 < \sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23} < 5$$

donc (P_{k+1}) est vérifiée.

Conclusion : (P_1) est vraie et (P_n) est héréditaire donc (P_n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

La suite (u_n) est donc croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et $u_n \in [2; 5]$ ($2 \leq u_n \leq 5$) pour tout entier $n \geq 1$.