

**TSpé DM2 Facultatif**  
**A rédiger pour le lundi 4 novembre 2024**

**Exercice 1 :**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

**1** La quantité  $3^n + 2 \times 3^n$  est égal à :

a.  $3^n(3^n + 2)$

b.  $3^n + 5^n$

c.  $3^{n+1}$

**2** Si la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$  :

a.  $u_1 = 5$

b.  $u_2 = 200$

c. La suite  $(u_n)$  est croissante.

**3** Si la suite  $(u_n)$  est géométrique alors on peut avoir :

a.  $u_n = (n+1)^2$

b.  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

**4** Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique alors on peut avoir :

a.  $u_n = n^2 + 3$

b.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c.  $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

**Exercice 2:**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

**1** Calculer  $u_1$  et vérifier que  $u_2 = 9\,415$ .

**2** a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n > 4\,000.$$

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**3** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_n - 4\,000$ .

a. Calculer  $v_0$ .

b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

**4** En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5% chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

### Exercice 3:

On donne la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$ .

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations.
- 2) On admet que  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $[0 ; 5]$ . Grâce à la calculatrice, donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- 3) Etudier la convexité de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $g$  au point d'abscisse  $-\frac{1}{3}$ .
- 5) La courbe représentative de  $g$  admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation  $y = 3x + 2$  ? Si oui, en quel(s) point(s).

### Exercice 4 :

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_1 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$ .

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ . Ainsi  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) a) Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .  
a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .
- 2) Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante et que  $u_n \in [2 ; 5]$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

## CORRECTION

### Exercice 1 :

**1** La quantité  $3^n + 2 \times 3^n$  est égal à :

a.  $3^n(3^n + 2)$

b.  $3^n + 5^n$

c.  $3^{n+1}$

$$\begin{aligned}3^n + 2 \times 3^n &= 3^n + 2 \times 3^1 \\ &= 3^n \times (2 + 1) \\ &= 3 \times 3^n \\ &= 3^{n+1}\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

**2** Si la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$  :

a.  $u_1 = 5$

b.  $u_2 = 200$

c. La suite  $(u_n)$  est croissante.

On a  $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$ , d'où on déduit  $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2$ .

Ainsi pour tout entier naturel  $n : u_n^2 \geq 0$  car le carré d'un réel est toujours positif.

En multipliant par  $2 > 0$ , on a pour tout entier naturel  $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

Ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est croissante.

La bonne réponse est c.

**3** Si la suite  $(u_n)$  est géométrique alors on peut avoir :

a.  $u_n = (n+1)^2$

b.  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$

c.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

Si la suite  $(u_n)$  est géométrique alors pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = qu_n$ , où  $q$  désigne une constante. Or dans le c. , on a  $u_{n+1} = -u_n = -1 \times u_n$

La bonne réponse est c.

**4** Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique alors on peut avoir :

a.  $u_n = n^2 + 3$

b.  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

c.  $u_n = \frac{3}{4}n - 3$

Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique alors pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} - u_n = r$  où  $r$  désigne une constante. Or dans le c. , on a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}(n+1) - 3 - \left(\frac{3}{4}n - 3\right) \\ &= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} - 3 - \frac{3}{4}n + 3 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

La bonne réponse est c.

## Exercice 2 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

**1** Calculer  $u_1$  et vérifier que  $u_2 = 9\,415$ .

- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$ .
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$ .

$$u_1 = 9\,700 \text{ et on a bien } u_2 = 9\,415.$$

**2** a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n > 4\,000.$$

Montrons par récurrence sur  $n$  la propriété  $\pi(n)$  : «  $u_n > 4\,000$  ».

▮ *Initialisation* :

$$u_0 = 10\,000 \text{ et } 10\,000 > 4\,000$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

▮ *Hérédité* : soit  $k \geq 0$  un entier fixé. On suppose que  $u_k > 4\,000$ . (HR)

On veut prouver que  $u_{k+1} > 4\,000$

$$u_{k+1} = 0,95u_k + 200$$

$$u_k > 4\,000$$

$$0,95u_k > 0,95 \times 4\,000$$

$$0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200$$

$$u_{k+1} > 4\,000$$

d'après (HR)

en multipliant par  $0,95 > 0$

en ajoutant 200

car  $0,95 \times 4\,000 + 200 = 4\,000$

▮ *Conclusion* : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier  $n$ , on a «  $u_n > 4\,000$  ».

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Méthode : On étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 200 - u_n$$

$$= (0,95 - 1)u_n + 200$$

$$= -0,05u_n + 200$$

$$= -0,05(u_n - 4\,000)$$

$$-0,05 < 0$$

$(u_n - 4\,000) > 0$  car  $u_n > 4\,000$  } , par produit on a  $-0,05(u_n - 4\,000) < 0$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n < 0$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**3** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_n - 4000$ .

a. Calculer  $v_0$ .

Pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = u_0 - 4000 = 10\,000 - 4000 = 6\,000$ .

b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à  $0,95$ . Au choix :

*Méthode 1* : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n.$$

L'égalité  $v_{n+1} = 0,95v_n$  vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à  $0,95$ .

*Méthode 2* : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a vu que  $u_n > 4000$ , donc  $v_n = u_n - 4000 > 0$ .

$$\text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$$

$$\frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel  $n$ , montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à  $0,95$ .

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

D'après le résultat précédent, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000.$$

**4** En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

$u_n$  est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang  $n$ ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

### Exercice 3 :

On donne la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-3x} + 3x - 5$ .

1) Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations.

$$g'(x) = -3e^{-3x} + 3 = 3(1 - e^{-3x})$$

$$\text{Signe de } g'(x) : 1 - e^{-3x} \geq 0 \iff 1 \geq e^{-3x} \iff e^0 \geq e^{-3x} \iff 0 \geq -3x \iff x \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	$0$	$+$
variations de $g$			

$$g(0) = e^0 + 0 - 5 = 1 - 5 = -4$$

2) On admet que  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $[0 ; 5]$ . Grâce à la calculatrice, donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

$$\text{A l'aide de la calculatrice on obtient } \mathbf{1,66 < \alpha < 1,67}$$

3) Etudier la convexité de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$g''(x) = 9e^{-3x} \quad g''(x) > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ donc } \mathbf{\text{la fonction } g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}.$$

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $g$  au point d'abscisse  $-\frac{1}{3}$ .

$$y = g'(-\frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) + g(-\frac{1}{3}) \quad \text{avec } g(-\frac{1}{3}) = e^1 - 1 - 5 = e - 6 \quad \text{et } g'(-\frac{1}{3}) = 3(1 - e)$$

$$y = 3(1 - e)(x + \frac{1}{3}) + e - 6$$

$$y = 3(1 - e)x + 1 - e + e - 6$$

$$y = 3(1 - e)x - 5$$

5) La courbe représentative de  $g$  admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d) d'équation  $y = 3x + 2$  ? Si oui, en quel(s) point(s).

(d) a pour coefficient directeur 3 donc il faut résoudre  $g'(x) = 3$

$$g'(x) = 3 \Leftrightarrow 3(1 - e^{-3x}) = 3 \Leftrightarrow 1 - e^{-3x} = 1 \Leftrightarrow e^{-3x} = 0$$

Or  $e^{-3x} > 0$  donc  $e^{-3x} = 0$  n'a pas de solution.

**La courbe représentative de  $g$  n'admet pas de tangente parallèle à la droite (d).**

#### Exercice 4 :

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_1 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 3}$ .

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ . Ainsi  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1) a) Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = x^2 - x + 3$$

$x^2 - x + 3$  est un trinôme de discriminant  $\Delta = 1 - 12 = -11$  donc  $x^2 - x + 3 > 0$  sur  $\mathbb{R}$

donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{donc } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{donc } f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}$$

$$2\sqrt{x^2 - x + 3} > 0 \quad \text{et} \quad 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
variations de $f$			

b) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 3} = x \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = x^2 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \mathbf{S = \{3\}}$$

2) a) Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante et que  $u_n \in [2; 5]$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

On pose  $(P_n)$  la propriété : pour tout  $n \geq 1$ ,  $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ .

Initialisation :  $n = 1$   $u_1 = 2$  et  $u_2 = f(2) = \sqrt{5}$  ;  $2 \leq 2 \leq \sqrt{5} \leq 5$  donc  $(P_1)$  est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe  $k$  entier,  $k \geq 1$ , tel que  $(P_k)$  soit vérifiée c'est-à-dire que  $2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$ .

Démontrons qu'alors  $(P_{k+1})$  est vérifiée c'est-à-dire que  $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$ .

$2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$ .  $f$  étant croissante sur  $[2; 5]$  on a :

$$f(2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(5) \text{ donc } \sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23}.$$

$$\text{Or } \sqrt{5} > 2 \text{ et } \sqrt{23} < 5 \quad \text{donc } 2 < \sqrt{5} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{23} < 5$$

donc  $(P_{k+1})$  est vérifiée.

Conclusion :  $(P_1)$  est vraie et  $(P_n)$  est héréditaire donc  $(P_n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

**La suite  $(u_n)$  est donc croissante ( $u_n \leq u_{n+1}$ ) et  $u_n \in [2; 5]$  ( $2 \leq u_n \leq 5$ ) pour tout entier  $n \geq 1$ .**