LES PROBABILITES CONDITIONNELLES

I. Probabilités conditionnelles:

1) Définition :

A et B sont deux événements d'un univers Ω tel que $P(A) \neq 0$.
On définit la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$
par le nombre réel tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2) Propriétés :

Probabilité d'une réunion (rappel) :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité d'une intersection :

si $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ et si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Propriétés évidentes des probabilités conditionnelles :

$P_A(A) = 1$; $P_A(\varnothing) = 0$; $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

3) Tableau à double-entrée :

a) Exemple (tableau en effectif):

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'une classe de Première.

Tableau en effectif	Interne	Externe	Demi-pensionnaire	Total
Fille	2	3	11	16
Garçon	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

On choisit au hasard un élève.
On pose A : " l'élève choisi est une fille " ; B : " l'élève choisi est demi-pensionnaire ".
C : " l'élève choisi est un interne ".

1) Calculer la probabilité de choisir un élève demi-pensionnaire sachant que c'est une fille.

On calcule la probabilité conditionnelle $P_A(B)$. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{11}{16}$

2) L'élève choisi est un interne. Calculer la probabilité que ce soit un garçon.

On calcule la probabilité conditionnelle $P_C(\overline{A})$. $P_C(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(\overline{A})} = \frac{1}{18}$

b) Tableau de probabilités :

Tableau en probabilité	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

II. Formule des probabilités totales :

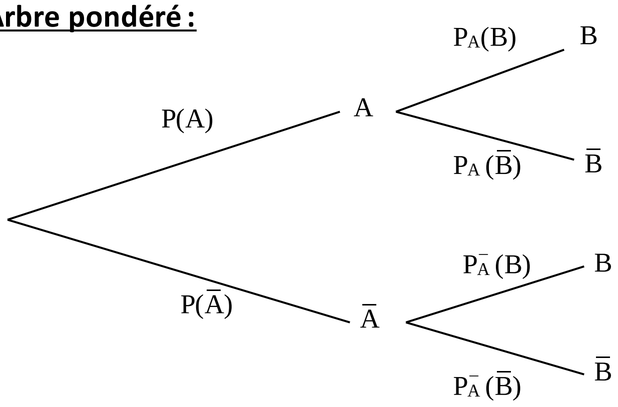
1) Règles de construction d'un arbre pondéré :

Dans un arbre :

la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même point vaut 1.

la probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités portées par les branches qui aboutissent à cet événement.

2) Arbre pondéré :



$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

$P_{\bar{A}}(B) + P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

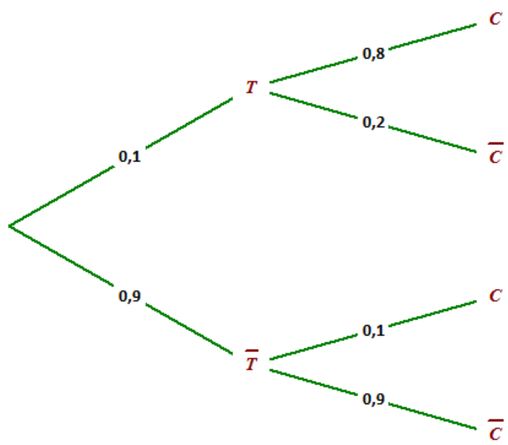
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(\bar{B}) = P(\bar{B} \cap A) + P(\bar{B} \cap \bar{A})$

3) Exemple :

Un magasin de jardinage fait une promotion sur une table de jardin et son lot de 4 chaises.
Après une semaine de promotion, on a pu établir que 10% des personnes entrant dans le magasin achètent une table.
Parmi les personnes qui achètent une table, 80% achètent aussi le lot de 4 chaises.
Parmi les personnes qui n'achètent pas la table, 10% achètent le lot de 4 chaises.
Une personne entre dans le magasin.
On note : T : " la personne achète une table " ; C : " la personne achète le lot de 4 chaises ".

1) Traduire par un arbre pondéré la situation. Donner $P_T(C)$.



$P_T(C) = 0,8.$

2) a) Calculer la probabilité que la personne achète un lot de 4 chaises.

$P(C) = P(C \cap T) + P(C \cap \bar{T}) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,1 = 0,08 + 0,09 = 0,17.$

b) Calculer la probabilité que la personne n'achète pas de table, sachant qu'elle a acheté les chaises.

$$P_C(\bar{T}) = \frac{P(C \cap \bar{T})}{P(C)} = \frac{0,08}{0,17} = \frac{8}{17}$$

4) Formule des probabilités totales :

a) Définition d'une partition :

Les événements A_1 , A_2 , …,A_n forment une partition de l'univers Ω si et seulement si :

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ et pour tout i et j entiers variant de 1 à n , $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \varnothing$

Remarque : A et $\overline{A}$ forme toujours une partition de l'univers Ω.

b) Formule des probabilités totales :

Si A_1 , A_2 , …,A_n forment une partition de l'univers Ω

alors la probabilité d'un événement B de l'univers Ω est égale à :

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots. + P(B \cap A_n)$

$P(B) = P(A_1) \times P_{A1}(B) + P(A_2) \times P_{A2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{An}(B)$

Remarque : En utilisant A et $\overline{A}$ comme partition de Ω on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

III. Evénements indépendants :

1) Définition :

Deux événements A et B d'un même univers sont dits indépendants

si et seulement si $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A)$.

ATTENTION ! Ne pas confondre avec A et B sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$)

2) Conséquence (plus utile que la définition) :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{d'où} \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si A et B sont indépendants.

3) Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants

(de même que A et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$).

Démonstration :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car A et B indépendants.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ car A et $\overline{A}$ réalisent une partition de B.

donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times [1 - P(A)] = P(B) \times P(\overline{A})$

donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

4) Exemple :

Un hypermarché vend par paquets d'un kilogramme, des clémentines et des oranges, en provenance d'Europe (Espagne ou Italie) et du Maroc. Le nombre de kilogrammes mis en vente est donné par le tableau ci–dessous :

	Italie	Espagne	Maroc	Total
Clémentines	100	250	150	500
Oranges	300	550	650	1500
Total	400	800	800	2000

Un acheteur prend au hasard un paquet de 1 kilo de ces fruits.

1) Quelle est la probabilité des événements :

C : " acheter des clémentines " et I: " acheter un paquet italien "

$P(C) = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$ et $P(I) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$

2) Les événements C et I sont-ils indépendants

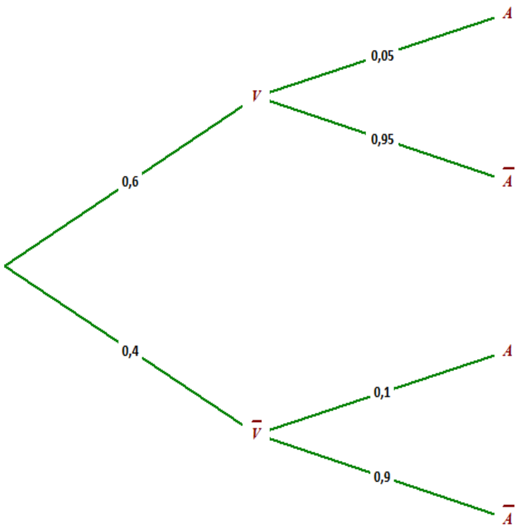
$P(C \cap I) = \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$ et $P(C) \times P(I) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

$P(C \cap I) = P(C) \times P(I)$ donc C et I sont indépendants.

IV. Exercice bilan:

60% d'une population est vaccinée (V) contre une maladie.
On constate que 5% des personnes vaccinées font une réaction allergique A à un produit.
Parmi les personnes non vaccinées, 10% sont victimes d'une réaction allergique A.

On construit un arbre pondéré:



1) On choisit, au hasard, une personne vaccinée.
Calculer la probabilité d'obtenir une personne victime d'une réaction allergique.

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.
En effet, il faut considérer les personnes vaccinées seulement avant de s'intéresser aux personnes allergiques.
Cette probabilité se notera $P_V(A)$ et on lira P de A sachant V.
On a $P_V(A) = 0{,}05$.

2) On choisit, au hasard, une personne non vaccinée.
Calculer la probabilité d'obtenir une personne victime d'une réaction allergique.

Idem question précédente. $P_{\overline{V}}(A) = 0{,}1$

3) Calculer la probabilité d'obtenir, dans la population, une personne victime d'une réaction allergique et vaccinée.
Il s'agit de la probabilité d'une intersection. $P(A \cap V) = 0{,}05 \times 0{,}6 = 0{,}03$.

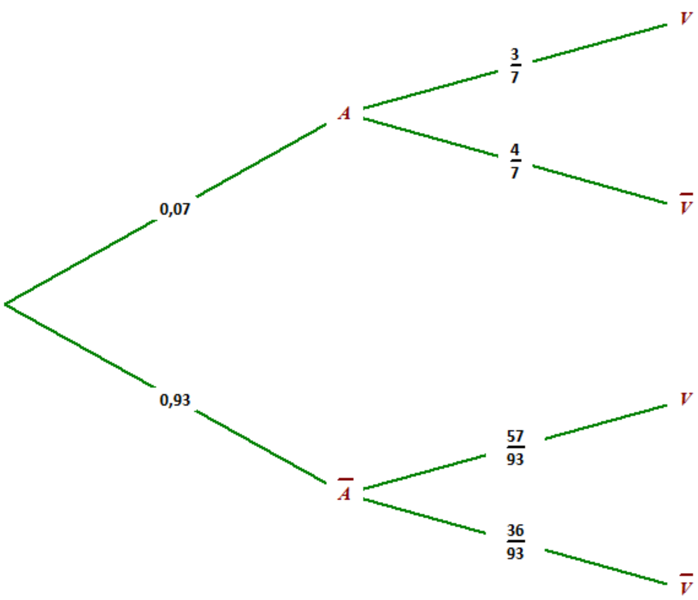
4) Calculer la probabilité d'obtenir, dans la population, une personne victime d'une réaction allergique.
Il faut calculer P(A). On peut construire un tableau à double-entrée.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
V	$0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03$	$0{,}95 \times 0{,}6 = 0{,}57$	0,6
$\overline{V}$	$0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$	$0{,}9 \times 0{,}4 = 0{,}36$	0,4
TOTAL	0,07	0,93	1

On voit, grâce au tableau, que $P(A) = P(A \cap V) + P(A \cap \overline{V}) = 0{,}07$.

5) Calculer la probabilité d'obtenir, dans la population, une personne ni victime d'une réaction allergique ni vaccinée.
$P(\overline{A} \cap \overline{V}) = 0{,}9 \times 0{,}4 = 0{,}36$

6) Calculer la probabilité d'obtenir, parmi les personnes ayant une réaction allergique, une personne vaccinée.
Il faudrait inverser l'arbre. On va se servir du tableau à double-entrée.



On sait que $P(A \cap V) = 0{,}03$
et que $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V)$

donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}07} = \dfrac{3}{7}$.

On aurait de même :

$P_A(\overline{V}) = \dfrac{P(A \cap \overline{V})}{P(A)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}07} = \dfrac{4}{7}$

$P_{\overline{A}}(V) = \dfrac{P(\overline{A} \cap V)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}57}{0{,}93} = \dfrac{57}{93}$

$P_{\overline{A}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{V})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}36}{0{,}93} = \dfrac{36}{93}$