Chapitre 4 **Suites : limites, convergence …**

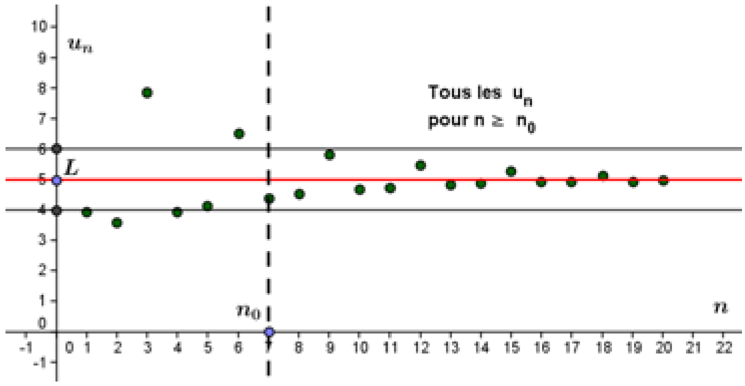
I. Définitions des différentes limites:

1) Limite finie :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert , contenant ℓ, contient tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.
On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ou que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Remarques :

- La limite d'une suite ne peut s'étudier qu'en $+\infty$, car n est un entier naturel .
  On écrit donc parfois $\lim u_n = \ell$.
- L'intervalle ouvert contenant ℓ est aussi petit qu'on veut. C'est comme si tous les points qui représentent les termes de la suite étaient contenus dans un tube à partir d'un certain rang.



- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie, celle-ci est unique.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_0 = 4$; $u_1 = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$; $u_2 = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$; $u_3 = \dfrac{11}{4} = 2{,}75$ … Cette suite semble avoir pour limite 3.
Pour justifier cette limite, on va choisir un intervalle ouvert centré sur 3, par exemple $] 2{,}75 ; 3{,}25 [$.
On doit alors démontrer que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans cet intervalle.
On cherche donc un rang n tel que $2{,}75 < u_n < 3{,}25$.

$$2{,}75 < u_n < 3{,}25 \Leftrightarrow 2{,}75 < 3 + \frac{(-1)^n}{n+1} < 3{,}25 \Leftrightarrow -0{,}25 < \frac{(-1)^n}{n+1} < 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 0{,}25 \Leftrightarrow n+1 > 4 \Leftrightarrow n > 3.$$

A partir du rang 4, $u_n \in] 2{,}75 ; 3{,}25 [$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 3.
On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 3$.

Limites de référence à connaître :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2) Limite infinie :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si , pour tout nombre A positif , l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $[A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exemple : $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Si $A = 1\,000$ $u_n \geq A \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,000 \Leftrightarrow n \geq 10$
A partir du rang 10,tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sont supérieurs à A*
A l'exception des 10 premiers termes, tous les autres sont dans l'intervalle $[A;+\infty[$.
Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est divergente et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

De même :
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si , pour tout nombre A négatif , l'inégalité $u_n \leq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $]-\infty ; A]$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Limites de référence à connaître :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -n = \lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} -n^3 = \lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

3) Suites particulières :

a) Suites arithmétiques: $u_n = u_0 + n \times r$

Si $r > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante
$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $r < 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante
$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

b) Suites géométriques: $u_n = u_0 \times q^n$

Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ (dépend du signe de u_0)
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $q = 1$ la suite est constante, $u_n = u_0$ et donc convergente de limite u_0.

Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si $q \leq -1$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.