LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.
La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée ……………………………………………………………..

Son ensemble de définition est ………………………………………………….

m est appelé ………………………………………………………………. p est appelé ………………………………………………………….

Cas particuliers :

Si m = 0 alors $f(x) = p$ est une fonction ……………………………………………….

Si p = 0 alors $f(x) = m\,x$ est une fonction ……………………………………………….

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui–non)	Linéaire (oui–non)	Constante (oui–non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$					
$g(x) = 3$					
$h(x) = 4x$					
$k(x) = 7 - 2x$					
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$					
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$					

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

f est une fonction définie sur IR.

f est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b.

Démonstration (à na pas connaitre par cœur):

Implication : si f affine alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Posons $f(x) = m\,x + p$. Alors $f(b) = m\,b + p$ et $f(a) = m\,a + p$.
Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$
Et $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c(x - a)$ donc $f(x) = c\,x \underbrace{- c\,a + f(a)}_{\text{constante}} = c\,x + d$.

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connait les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$f(x) = m\,x + p$ avec $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $p = f(a) - m\,a$ *ou* $p = f(b) - m\,b$.

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f.

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$ est représentée par une droite d'équation $y = m\,x + p$, qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Cas particuliers :

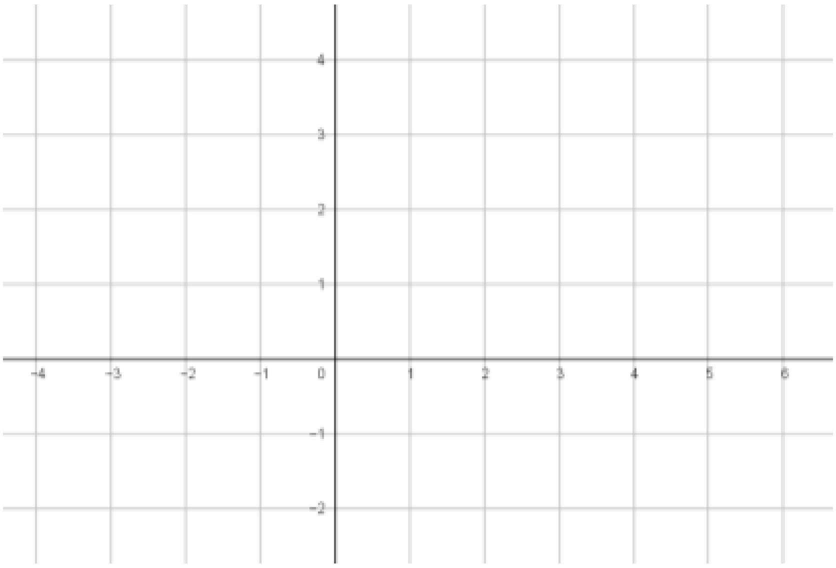
si f est linéaire, $p = 0$ et la droite représentant f passe par l'origine.

si f est constante, $m = 0$ et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f, il suffit de placer deux points

A (a ; f(a)) et B (b ; f(b)).

Exemple : Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0{,}5\,x + 2$.



Remarque : $m = -0{,}5 = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; –2) et B (–1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB) .

III. Etude d'une fonction affine :

1) Variations d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x)$ = m x + p :

Si m > 0 la fonction affine f est strictement croissante sur IR.
Si m < 0 la fonction affine f est strictement décroissante sur IR.
Si m = 0 la fonction affine f est constante sur IR.

Tableau de variations si m > 0

x	$-\infty$ $+\infty$
variations de f	

Tableau de variations si m < 0

x	$-\infty$ $+\infty$
variations de f	

Démonstration : Soit a et b deux réels tels que a < b.
Si m > 0 alors m a < m b donc m a + p < m b + p donc f(a) < f(b)
l'ordre n'est pas perturbé, la fonction est croissante.

Si m < 0 alors m a > m b donc m a + p > m b + p donc f(a) > f(b)
l'ordre est perturbé, la fonction est décroissante.

Exemple : Compléter les tableaux de variations de f et g définies sur IR par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = 5x + 4$

x	$-\infty$ $+\infty$
variations de f	

x	$-\infty$ $+\infty$
variations de g	

2) Parité d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x)$ = m x + p :

Parmi les fonctions affines, seules les fonctions linéaires sont impaires et seules les fonctions constantes sont paires.

Démonstration :

Une fonction linéaire est impaire. En effet si $f(x)$ = mx alors $f(-x)$ = – mx = – $f(x)$
Une fonction constante est paire. En effet si $f(x)$ = p alors $f(-x)$ = p = $f(x)$
Réciproquement:

- si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout les réels x
  donc – mx + p = – mx – p donc 2p = 0 donc p = 0. La fonction f est donc linéaire.
- si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout les réels x
  donc – mx + p = mx + p donc – mx = mx donc 2mx = 0 pour tout x donc m = 0.
  La fonction f est donc constante.

3) Signe d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$:

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow$ ………

La fonction f s'annule pour $\boldsymbol{x}$ = ………….

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) > 0 \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………

si m > 0 ……………………………………………………………………

f sera positive sur ……………………………………………

si m < 0 ……………………………………………………………………

f sera positive sur ……………………………………………

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) < 0 \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………

si m > 0 ……………………………………………………………………

f sera négative sur ……………………………………………

si m < 0 ……………………………………………………………………

f sera négative sur ……………………………………………

Si m = 0 f est constante, $f(\boldsymbol{x}) = p$ donc f est du même signe que ………

Tableau de signes si m > 0

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $f(x) = m\,x + p$	

Tableau de signes si m < 0

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $f(x) = m\,x + p$	

Remarque : à droite du 0, on retrouve toujours le signe de m.

Exemple : Compléter le tableau de signes de la fonction affine f définie sur IR par $f(x) = -3x + 8$

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de ………………………	

IV. Applications du signe d'une fonction affine aux résolutions d'inéquations :

1) Signe d'un produit :

Exemple : Résoudre l'inéquation $(5x-2)(-3x+4)<0$

Il faut étudier le signe de chacun des facteurs du produit.

Il faut faire un tableau regroupant les signes des deux facteurs et le signe de leur produit.

signe de $5x-2$	
signe de $-3x+4$	
signe de $(5x-2)(-3x+4)$	

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit …………………………………………………………….

C'est le cas sur …………………………………………….. et sur ………………………………………………..

Donc on écrit **S = ……………………………………………………**

2) Signe d'un quotient :

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{4-2x}{7x+3} \geq 0$

Il faut étudier le signe de chacun du numérateur et du dénominateur.

Il faut faire un tableau regroupant les signes des numérateurs et dénominateurs et le signe du quotient.

signe de $4-2x$	
signe de $7x+3$	
signe de $\frac{4-2x}{7x+3}$	

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit ………………………………………………………………..

C'est le cas sur ……………………………………………………………………………. .

Donc on écrit **S =** ……………………………………………

V. Utilisation de la calculette :

- Pour rentrer une fonction dans la calculette, on va dans le menu $f(x)$
  et on rentre l'expression de la fonction dans Y1 par exemple.
- On peut afficher la droite représentative en appuyant sur graphe.
- On peut afficher un tableau de valeurs en appuyant sur table (2nde graphe)
- On peut résoudre des équations en choisissant le menu résol puis 2: PlySmlt2 puis 1 : Racines d'un polynôme
  on choisit DEGRE 1 REEL AUTO NORMAL FLOTT
  puis SUIV. en appuyant sur la touche graphe
  on rentre l'équation à résoudre
  puis RESOL en appuyant sur la touche graphe
  La solution s'affiche.