Term Spé Fiche d'exercices sur les suites (révisions)

Exercice 1 :

La suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = u_n - (n-4)^2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 :

Représenter dans un repère les cinq premiers termes des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 4n - 7$ **2.** $u_n = n^2 + 1$

3. $u_{n+1} = 2u_n - 1$ avec $u_0 = 0$

Exercice 3 :

Les suites suivantes sont arithmétiques.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes.

1. $u_0 = 2$ et $r = 3$ 2. $u_0 = 4$ et $r = -3$

3. $u_1 = 3$ et $r = \frac{1}{2}$ 4. $u_1 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$

Exercice 4 :

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. $u_n = 7n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_n = n^2 + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n + 9, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Exercice 5 :

Les suites suivantes sont arithmétiques de raison r. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_2 = 2$ et $r = 4$ **2.** $u_5 = 7$ et $r = -\frac{1}{2}$

3. $u_3 = 4$ et $r = 12$ **4.** $u_8 = \frac{37}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$

Exercice 6 :

On donne le premier terme et la raison q des suites géométriques suivantes.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis calculer les cinq premiers termes.

1. $v_0 = 3$ et $q = 4$ **2.** $v_0 = 2$ et $q = -3$

3. $v_1 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$ **4.** $v_1 = -\frac{1}{4}$ et $q = 2$

Exercice 7 :

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. $v_n = 8n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $v_n = n^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $v_n = 2 \times 3n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $v_n = -5 \times 2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n + 3n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 5 + 7v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercice 8 :

Chacune des suites suivantes est géométrique.
Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_2 = 2$ et $q = -3$ **2.** $v_5 = -3$ et $q = 2$

3. $v_1 = -1$ et $q = \frac{1}{3}$ **4.** $v_{10} = \frac{1}{6}$ et $q = -1$

Exercice 9 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Justifier.

1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$.

3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5n + 2^n$.

Exercice 10 :

Une médiathèque a ouvert début 2017 et 3 000 personnes se sont inscrites durant la première année.

Chaque année, 75 % des inscrits renouvellent leur abonnement et 500 nouvelles adhésions ont lieu.

On modélise la situation par la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n, où $a_0 = 3000$ est le nombre d'adhérents en 2017 et a_n le nombre d'inscrits l'année 2017 $+n$.

1. a. Calculer a_1 et a_2.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 500$.

2. On pose $b_n = a_n - 2000$ pour tout entier naturel n.

a. Prouver que la suite (b_n) est une suite géométrique en précisant sa raison et son premier terme.

b. En déduire l'expression du terme général de la suite (b_n) puis de la suite (a_n).

c. Quel est le sens de variation de chaque suite ?

d. Conjecturer les limites des suites (a_n) et (b_n). Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhésions de cette médiathèque ?

3. On propose l'algorithme suivant.

a. Que permet de calculer cet algorithme ?

b. Interpréter le résultat obtenu à la fin de cet algorithme.

```
n ← 0
A ← 3 000
Tant que (A > 2 100) :
    A ← 0,75 A + 500
    n ← n + 1
Fin tant que
```

Exercice 11 :

Perrine place 8 000 € sur un compte dont le taux d'intérêts cumulés est de 3,8 %. Chaque année, 76 € de frais de gestion sont prélevés.

Pour tout entier n, on note C_n le capital de l'année n. On suppose que l'année 0 est l'année du premier dépôt.

1. On cherche le capital dont disposera Perrine dans 10 ans.

a. Établir une relation de récurrence pour définir la suite C_n.

b. Soit D_n la suite définie pour tout entier n par $D_n = C_n - 2000$. Prouver que cette suite est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

c. En déduire une expression de C_n en fonction de n et répondre au problème posé.

2. Combien d'années seront nécessaires pour que le capital augmente de 50 % ?

Exercice 12 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.

a. Calculer s_0, s_1 et s_2. Que peut-on conjecturer ?

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?

4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

5. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

a. $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

b. $W_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

Exercice 13 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

1. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

b. Résoudre $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. Soient α et β deux nombres réels.

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.

Déterminer la valeur des réels α et β pour que les suites (v_n) et (w_n) soient géométriques.

3. Déterminer $v_n - w_n$ en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

4. En déduire une expression de v_n, w_n et u_n en fonction de n.

Comment ruiner un roi et tous ses successeurs :

Dans l'antiquité, le roi des Indes demanda un nouveau jeu pour se distraire.

Son vizir Sissa inventa le jeu d'échecs.

Le roi, ravi de ce nouvel amusement lui demanda comment le récompenser.

Sissa dit : « Je voudrais un peu de riz. Placez un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz. »

Le roi accepta cette demande, qu'il trouva bien modeste.

Le conseiller s'écria : « Sire ! Vous conduisez notre pays à la ruine ! »

Pourquoi le conseiller du roi réagit ainsi ?