Ex 1 (valider une conjecture à l'aide d'une récurrence)
u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Avec la calculette déterminer
~~Avec un tableur, on a obtenu ci-contre~~ les premières valeurs de u_n et $1 + u_n$.
a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
b) Valider cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Ex 2 (suite bornée, suite croissante)
u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 < u_n < 3$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1}$.
Que peut-on en déduire pour la suite u ?

Ex 3 :
u est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq u_n \leq 7$.
b) Démontrer par récurrence que la suite u est croissante.

Ex 4
u est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
b) Démontrer par récurrence que la suite u est décroissante.

Ex 5 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $2^n \geq n + 1$.

Ex 6 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $4^n \geq 4n + 1$.

Ex 7
u est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$.
a) Calculer u_1 et u_2 ; émettre une conjecture.
b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Ex 8 (en géométrie)
On considère les triangles rectangles $OA_0A_1, OA_1A_2, \dots, OA_nA_{n+1}, \dots$ tels que
$OA_0 = 1$;
$A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots = 2$
a) Faire une figure (représenter les 3 premiers triangles)
b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $OA_n = \sqrt{4n + 1}$.

Ex 9
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 10
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ex 11
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1 + \pi)^n \geq 1 + n\pi$.

Ex 12
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

CORRECTION

Exercice 1 :

$u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 7$; $u_4 = 15$; $u_5 = 31$ ….

$1 + u_0 = 1 = 2^0$; $1 + u_1 = 2 = 2^1$; $1 + u_2 = 4 = 2^2$; $1 + u_3 = 8 = 2^3$; $1 + u_4 = 16 = 2^4$; $1 + u_5 = 32 = 2^5$ …

a) Conjecture : $u_n = 2^n - 1$.

b) Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $u_n = 2^n - 1$".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0 = 2^0 - 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k = 2^k - 1$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

D'après la définition de la suite, $u_{k+1} = 2\,u_k + 1 = 2\,(\,2^k - 1\,) + 1 = 2^{k+1} - 1$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 2 :

a) Posons pour tout n entier naturel, $n \geq 1$, P_n : " $0 < u_n < 3$ ".

Initialisation : $n = 1$ $u_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}2$ donc $0 < u_1 < 3$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, $k \geq 1$, tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $0 < u_k < 3$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 < u_{k+1} < 3$

$0 < u_k < 3 \Leftrightarrow 5 < u_k + 5 < 8$

La fonction racine carrée est une fonction définie et strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty[$

donc elle ne perturbe pas l'ordre donc $\sqrt{5} < \sqrt{u_k + 5} < \sqrt{8}$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

b) Posons pour tout n entier naturel , P_n : " $u_n < u_{n+1}$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0$; $u_1 = \sqrt{5}$ donc $u_0 < u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k < u_{k+1}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} < u_{k+2}$

$u_k < u_{k+1} \Leftrightarrow u_k + 5 < u_{k+1} + 5$

La fonction racine carrée est une fonction définie et strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty[$

donc elle ne perturbe pas l'ordre donc $\sqrt{u_k + 5} < \sqrt{u_{k+1} + 5}$ donc $u_{k+1} < u_{k+2}$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

c) Pour tout n entier naturel , on a $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3 :

a) Posons pour tout n entier naturel, $n \geq 1$, P_n : " $0 \leq u_n \leq 7$ ".

Initialisation : $n = 1$ $u_1 = \sqrt{14} \approx 3{,}7$ donc $0 < u_1 < 7$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, $k \geq 1$ tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq 7$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 \leq u_{k+1} \leq 7$

$0 \leq u_k \leq 7 \Leftrightarrow 0 \leq 7\, u_k \leq 49$

La fonction racine carrée est une fonction définie et strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty[$

donc elle ne perturbe pas l'ordre donc $0 \leq \sqrt{7\, u_k} \leq 7$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq 7$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

b) Posons pour tout n entier naturel , P_n : " $u_n < u_{n+1}$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 2$; $u_1 = \sqrt{14} \approx 3{,}7$ donc $u_0 < u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k < u_{k+1}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} < u_{k+2}$

$u_k < u_{k+1} \Leftrightarrow 7\, u_k < 7\, u_{k+1}$

La fonction racine carrée est une fonction définie et strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty[$

donc elle ne perturbe pas l'ordre donc $\sqrt{7\, u_k} < \sqrt{7\, u_{k+1}}$ donc $u_{k+1} < u_{k+2}$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout n entier naturel , on a $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 4 :

a) Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $u_n \geq 0$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 10$ donc $u_0 \geq 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k \geq 0$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq 0$

$u_k \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, u_k \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, u_k + 1 \geq 1 \geq 0 \Leftrightarrow u_{k+1} \geq 0$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

b) Posons pour tout n entier naturel , P_n : " $u_n > u_{n+1}$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 10$; $u_1 = 5 + 1 = 6$ donc $u_0 > u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k > u_{k+1}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} > u_{k+2}$

$u_k > u_{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, u_k > \frac{1}{2} u_{k+1} \Leftrightarrow u_{k+1} > u_{k+2}$ donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout n entier naturel , on a $u_n > u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5 :

Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $2^n \geq n + 1$ ".

Initialisation : $n = 0$ $2^0 = 1$ et $1 \geq 0 + 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $2^k \geq k + 1$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $2^{k+1} \geq k + 2$

$2^k \geq k + 1 \Leftrightarrow 2^k \times 2 \geq (k + 1) \times 2 \Leftrightarrow 2^{k+1} \geq 2k + 2 \geq k + 2$ car $k \geq 0$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 6 :

Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $4^n \geq 4n + 1$ ".

Initialisation : $n = 0$ $4^0 = 1$ et $1 \geq 4 \times 0 + 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $4^k \geq 4k + 1$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $4^{k+1} \geq 4(k + 1) + 1$

donc $4^{k+1} \geq 4k + 5 \geq 4k + 1$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 7 :

a) $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 3}{u_0 + 3} = \dfrac{18}{6} = 3$ et $u_2 = \dfrac{5 \times u_1 + 3}{u_1 + 3} = \dfrac{18}{6} = 3$

La suite (u_n) semble constante.

b) Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $u_n = u_{n+1}$ ".

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 3$ et $u_1 = 3$ donc $u_0 = u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k = u_{k+1}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} = u_{k+2}$

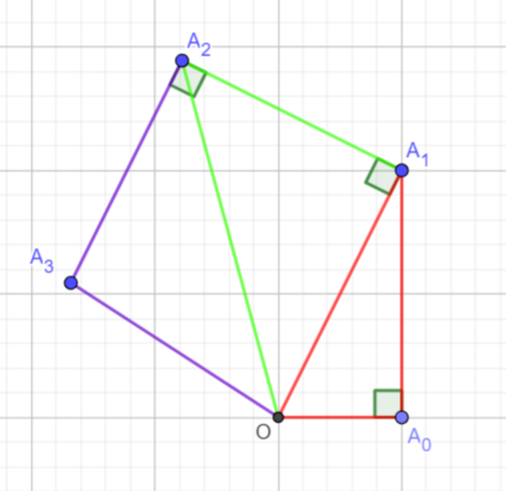
$u_k = u_{k+1} \Leftrightarrow 5u_k + 3 = 5u_{k+1} + 3$ et $u_k = u_{k+1} \Leftrightarrow u_k + 3 = u_{k+1} + 3$

Donc $\dfrac{5u_k + 3}{u_k + 3} = \dfrac{5u_{k+1} + 3}{u_{k+1} + 3}$ donc $u_{k+1} = u_{k+2}$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 8 :



Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $OA_n = \sqrt{4n+1}$ ".

Initialisation : $n = 0$ $OA_0 = 1$ et $\sqrt{4 \times 0 + 1} = 1$

donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $OA_k = \sqrt{4k+1}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que

$OA_{k+1} = \sqrt{4(k+1)+1} = \sqrt{4k+5}$

Le triangle OA_kA_{k+1} est rectangle en A_k .

D'après le théorème de Pythagore, on a : $OA_{k+1}{}^2 = OA_k{}^2 + A_kA_{k+1}{}^2$

$OA_{k+1}{}^2 = (\sqrt{4k+1})^2 + 2^2$

$OA_{k+1}{}^2 = 4k + 1 + 4$

$OA_{k+1}{}^2 = 4k + 5$

$OA_{k+1} = \sqrt{4k+5}$

car $k \geq 0$ donc $4k + 5 > 0$ et OA_{k+1} est une longueur

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 9 :

Posons pour tout n entier naturel, $n \geq 1$, P_n : " $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ".

Initialisation : $n = 1$ $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, $k \geq 1$ tel que P_k est vrai c'est-à-dire que

$1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que

$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{k(k+1) + 2k + 2}{2} = \dfrac{k^2 + 3k + 2}{2}$

$\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = \dfrac{k^2 + 2k + k + 2}{2} = \dfrac{k^2 + 3k + 2}{2}$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

Exercice 10 :

Posons pour tout n entier naturel, $n \geq 1$, P_n : " $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

Initialisation : $n = 1$ $\quad \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, $k \geq 1$ tel que P_k est vrai c'est-à-dire que

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k^2 + 2k + 1)}{6}$$

$$= \frac{k(2k^2 + k + 2k + 1) + 6k^2 + 12k + 6}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k^2 + 2k + k + 2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 6k^2 + 4k + 3k^2 + 9k + 6}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

Exercice 11 :

Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $(1+\pi)^n \geq 1 + n\pi$ ".

Initialisation : $n = 0$ $\quad (1+\pi)^0 = 1 = 1 + 0 \times \pi$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $(1+\pi)^k \geq 1 + k\pi$
Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $(1+\pi)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\pi$

$(1+\pi)^{k+1} = (1+\pi)^k \times (1+\pi)$ donc $(1+\pi)^{k+1} \geq (1+k\pi)(1+\pi)$
donc $(1+\pi)^{k+1} \geq 1 + \pi + k\pi + k\pi^2$
donc $(1+\pi)^{k+1} \geq 1 + \pi(1 + k + k)$
Or $k \geq 0$ donc $1 + k + k \geq 1 + k$
donc $(1+\pi)^{k+1} \geq 1 + \pi(1 + k + k) \geq 1 + (k+1)\pi$
Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

Exercice 12 :

Posons pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, P_n : " $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ".

Initialisation : $n = 2$ $\quad 1-\frac{1}{2^2} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$ donc P_2 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier k, $k \geq 2$ tel que P_k est vrai c'est-à-dire que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2k+2}$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2k} \times \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2k} - \frac{k+1}{2k} \times \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1)^2}{2k(k+1)^2} - \frac{k+1}{2k(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)^2-1\right]}{2k(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{k^2+2k}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$= \frac{k+2}{2k+2}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_2 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n, $n \geq 2$.