Nom, Prénom : …………………………………………………… **Mardi 24 Septembre 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°1

Calculette en mode examen

Les élèves ayant un tiers-temps ne traiteront pas les questions précédées d'un @

/40

Exercice 1 : (4,5 *points*)

Entourer la bonne réponse .Une bonne réponse rapporte 0,75 point. Une mauvaise réponse n'enlève pas de point. L'absence de réponse n'est pas pénalisante. Aucune justification n'est attendue.

	Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**	**Réponse D**
Dans $\mathbb{R}$, l'équation $5x^2 - 3x + 8 = 0$ a :	Aucune solution	Une solution	2 solutions	3 solutions
La fonction racine carrée est :	définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$	définie sur $[0 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; +\infty[$	définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$
f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (x^3 + 1)(3x - 4)$. Alors, sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$=	$9x^2$	$12x^3 - 10x^2 + 3$	$12x^3 - 12x^2 + 3$	$6x^3 - 12x^2 - 3$
h est une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $h(x) = 4x^5 - 2x + \dfrac{3}{x}$. Alors sur $\mathbb{R}-\{0\}$, $h'(x)$ =	$20x^4 - 2 + \dfrac{3}{x^2}$	$20x^4 - 2 - \dfrac{3}{x^2}$	$16x^4 - 2 - \dfrac{3}{x^2}$	$20x^4 - 2 - \dfrac{1}{x^2}$
j est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x)= x^2 +3$. C_j est la courbe représentative de la fonction j dans un repère. Une équation de la tangente à C_j au point d'abscisse -2 est :	$y = -4x + 15$	$y = 7x + 10$	$y = -4x - 1$	$y = -4x + 9$
@ g est une fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Alors $g'(x)$ =	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2}x\sqrt{x}$

Exercice 2 : (5,25 *points*)

La fonction f est la fonction définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = (12x - 6)\, e^{-2x}$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 5]$.
   Préciser les extrémums (nature, valeur exacte) et les valeurs exactes aux bornes de l'intervalle de définition.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 3 : (4 *points*)

Simplifier les expressions suivantes. (on écrira les formules utilisées à coté)

$A = \dfrac{e^{-5x+3}}{e^{-7+2x}}$; @ $B = e^{-9x+1} \times e^{-2x+4} \times e^{8}$; $C = (e^{-4x+3})^2 \times e^{3x+2} \times \dfrac{1}{e^{-6x+1}}$

Exercice 4 : (6,25 *points*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{-3x+5} = e^{7x-4}$ @2) $e^{x^2-4x-5} = 1$ 3) $5e^{4x-5} = -1$ 4) $e^{2x} + 4e^{x} - 5 = 0$

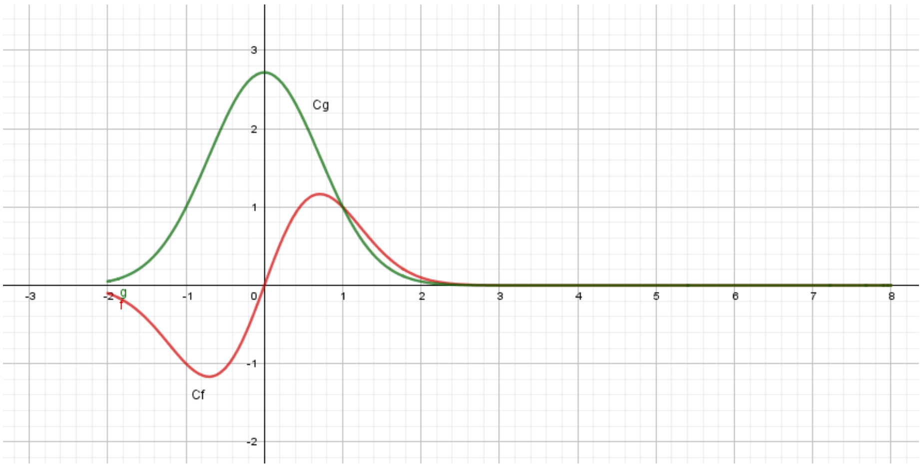
Exercice 5 : *(12,25 points)*

Partie A : On considère la fonction f définie sur [– 2 ; 8] par $f(x) = xe^{1-x^2}$

1. On admet que f est dérivable sur [– 2 ; 8] et on note f ′ sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel de [– 2 ; 8], $f'(x) = (1 - 2x^2)\, e^{1-x^2}$

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B : On considère la fonction g définie pour tout réel de [– 2 ; 8] par $g(x) = e^{1-x^2}$.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Sur [– 2 , 8], résoudre l'équation $(x - 1)e^{1-x^2} = 0$
2. a. Etudier la position relative de C_f par rapport à C_g sur [– 2 ; 8].

   b. En déduire que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A dont on donnera les coordonnées.

@ c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont des tangentes différentes (équations différentes).

Exercice 6 : *(5,75 points)*

Calculer la dérivée de chaque fonction définie et dérivable sur I.

$f(x) = 4x^2 + 2x + \dfrac{3}{x} - 3e^x$ I $= \mathbb{R}^*$; $g(x) = -7x^2\, e^{2x}$ I $= \mathbb{R}$

$h(x) = \dfrac{6e^x - 2}{e^x + 1}$ I $= \mathbb{R}$; $i(x) = 7\, e^{\frac{5x+1}{x^2+3}}$ I $= \mathbb{R}$

Exercice 7 : *(3 points)*

Simplifier les expressions suivantes :

$A = (e^x - 1)^2 - (4e^x + 3)^2$ @ $B = (e^x + e^{-x})^2 - (4e^x - 2e^{-x})(2e^x + 3e^{-x})$

Bonus :

Soit P un polynôme défini sur les réels par $P(x) = 4x^3 - 9x^2 + 9x - 14$.

1. Justifier que P puisse s'écrire sous la forme $P(x) = (x - 2)\, (ax^2 + bx + c)$
   avec a, b et c des réels
2. Déterminer les valeurs a, b et c.

CORRECTION

Exercice 1 :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Dans ℝ , l'équation $5x^2 - 3x + 8 = 0$ a :	**Aucune solution**	~~Une solution~~	~~2 solutions~~	~~3 solutions~~
La fonction racine carrée est:	~~définie et dérivable sur [0 ; + ∞[~~	**définie sur [0 ; +∞[et dérivable sur]0 ; + ∞[**	~~définie et dérivable sur]0 ; + ∞[~~	~~ℝ~~
f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (x^3 + 1)(3x - 4)$. Alors $f'(x) =$	$\cancel{9x^2}$	$\cancel{12x^3 - 10x^2 + 3}$	$\mathbf{12x^3 - 12x^2 + 3}$	$\cancel{6x^3 - 12x^2 - 3}$
h est une fonction définie sur ℝ−{0} par $h(x) = 4x^5 - 2x + \frac{3}{x}$. Alors $h'(x) =$	$\cancel{20x^4 - 2 + \frac{3}{x^2}}$	$\mathbf{20x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}}$	$\cancel{16x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}}$	$\cancel{20x^4 - 2 - \frac{1}{x^2}}$
j est la fonction définie sur ℝ par $j(x)= x^2 +3$. C_j est la courbe représentative de la fonction j dans un repère. L'équation de la tangente à C_j au point d'abscisse – 2 est :	$\cancel{y = -4x + 15}$	$\cancel{y = 7x + 10}$	$\mathbf{y = -4x - 1}$	$\cancel{y = -4x + 9}$
@ g est une fonction définie et dérivable sur [0 ; + ∞[par $g(x) = x\sqrt{x}$. Alors $g'(x) =$	$\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$\mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$	$\cancel{2\sqrt{x}}$	$\cancel{\frac{1}{2}x\sqrt{x}}$

Exercice 2 : (6,5 *points*)

1) $f'(x) = 12\,e^{-2x} + (12x - 6)(-2\,e^{-2x}) = e^{-2x}\,(12 - 24x + 12) = e^{-x}\,(-24x + 24)$

Signe de $f'(x)$: $e^{-x} > 0$ et $-24x + 24 \geq 0 \Leftrightarrow -24x \geq -24 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow x \leq 1$

x	0		1		5
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f	-6	↗	$6\,e^{-2}$	↘	$54\,e^{-10}$

2) Cette équation est $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = 24\,e^0 = 24$ et $f(0) = -6\,e^0 = -6$

Donc **l'équation de cette tangente est $y = 24x - 6$**

Exercice 3 :

$A = \frac{e^{-5x+3}}{e^{-7+2x}} = e^{-5x+3-2x+7} = e^{-7x+10}$

@ $B = e^{-9x+1} \times e^{-2x+4} \times e^{8} = e^{-9x+1-2x+4+8} = e^{-11x+13}$

$C = (e^{-4x+3})^2 \times e^{3x+2} \times \frac{1}{e^{-6x+1}} = e^{-8x+6} \times e^{3x+2} \times e^{6x-1} = e^{x+7}$

Exercice 4 :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a=b$ donc $e^{-3x+5} = e^{7x-4} \Leftrightarrow -3x+5 = 7x-4 \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}$ S= $\{\frac{9}{10}\}$

@ $e^{x^2-4x-5} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-4x-5} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6}{2} = 5$ S = { – 1 ; 5}

$5e^{4x-5} = -1 \Leftrightarrow e^{4x-5} = -0{,}2$ *une exponentielle est toujours strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *donc* $S = \varnothing$

$e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$ équivaut à $(e^x)^2 + 4e^x - 5 = 0$. Posons X = e^x on obtient $X^2 + 4X - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7}{2} = -5$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+7}{2} = 2$

D'où $e^x = -5$ et $e^x = 1$

Pas de solution $x = 0$ S = {0}

Exercice 5 :

Partie A :On considère la fonction f définie sur [-2 ; 8] par $f(x) = xe^{1-x^2}$

1. f *est de la forme* $u \times v$ *avec* $u(x) = x$ *et* $v(x) = e^{1-x^2}$

   $u'(x) = 1$ $v'(x) = -2x\, e^{1-x^2}$

   donc $f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)\, e^{1-x^2}$

2. Signe de $f'(x)$: e^{1-x^2} est positif sur $\mathbb{R}$ donc f' est du signe de $1 - 2x^2$.

   $1 - 2x^2$ est un trinôme $\Delta = 0 + 8 = 4 \times 2$ et $x_1 = \frac{-2\sqrt{2}}{-4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	-2		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		8
signe de $1-2x^2$		- signe de a	0	+	0	- signe de a	
signe de e^{1-x^2}		+		+		+	
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	

$f(-2) = -2\, e^{1-(-2)^2} = -2\, e^{-3}$

$f(8) = 8e^{1-8^2} = 8\, e^{-63}$

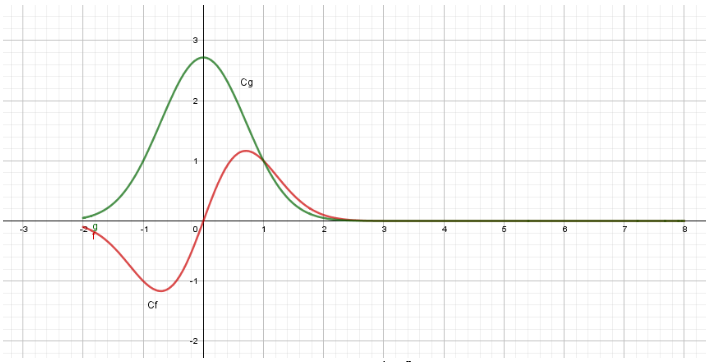
$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-0{,}5} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{0{,}5}$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{0{,}5}$

x	-2		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		8
Variations de f	$-2\, e^{-3}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{0{,}5}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{0{,}5}$	$\searrow$	$8\, e^{-63}$

Partie B :

On considère la fonction g définie pour tout réel de [-2 ; 8] par $g(x) = e^{1-x^2}$.



1. Sur [-2 , 8] : $(x-1)e^{1-x^2} = 0$ un produit est nul si l'un des facteurs est nul

   $x - 1 = 0$ ou $e^{1-x^2} = 0$

   $x = 1$ *une exponentielle est toujours strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *donc pas de solution*

   S = {1}

2. a. Etudier la position relative de C_f par rapport à C_g sur [-2 ; 8]

   Il faut calculer $f(x) - g(x)$ puis étudier le signe de cette différence.

   $f(x) - g(x) = \mathbf{xe^{1-x^2}} - e^{1-x^2} = (x-1)e^{1-x^2}$

   En utilisant la question précédente $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	-2		1		8
$x-1$		–	0	+	
e^{1-x^2}		+		+	
$f(x)-g(x)$		–	0	+	

Sur [-2 ; 1[, $f(x) - g(x) < 0$ donc C_f est en dessous C_g

Sur]1 ; 8], $f(x) - g(x) > 0$ donc C_f est en dessus C_g

b. Les deux courbes se coupent en un point d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = g(1) = e^{1-1} = 1$ donc A (1 ; 1) est le point d'intersection des deux courbes.

@c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont des tangentes différentes (équations différentes)

Equation de la tangente à Cf au point A d'abscisse 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = 1\,e^{1-1} = 1$ et $f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)\,e^{1-1} = -1$

$y = -1(x-1) + 1$ donc $y = -x + 2$

Equation de la tangente à Cg au point A d'abscisse 1 : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$g'(x) = -2xe^{1-x^2}$ donc $g(1) = -2^{e1-1} = -2$ et $g(1) = e^{1-1} = 1$

$y = -2(x-1) + 1$ donc $y = -2x + 3$

On voit bien que les deux équations ne sont pas les mêmes donc les deux courbes n'ont pas la même tangente en A.

Exercice 6 :

$f(x) = 4x^2 + 2x + 1 - 3e^x$ $\quad f'(x) = 8x + 2 - 3e^x$

#$g(x) = -7x^2\, e^{2x}$ $\quad$ *g est de la forme* $u \times v$ *avec* $u(x) = -7x^2$ *et* $v(x) = e^{2x}$

$u'(x) = -14x$ *et* $v(x) = 2\,e^{2x}$

$g'(x) = -14x\,e^{2x} + (-7x^2) \times 2e^{2x} = -14x\,e^{2x} - 14x^2\,e^{2x} = -14xe^{2x}(x + 1)$

$h(x) = \dfrac{6e^x - 2}{e^x + 1}$ $\quad$ h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 6e^x - 2$ et $v(x) = e^x + 1$

$u'(x) = 6e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$$h'(x) = \frac{6e^x(e^x+1) - (6e^x-2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{6e^{2x} + 6e^x - 6e^{2x} + 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{8e^x}{(e^x+1)^2}$$

$i(x) = 7\,e^{\frac{5x+1}{x^2+3}}$

i est de la forme e^u avec $u(x) = \dfrac{5x+1}{x^2+3}$; u est de la forme $\dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = 5x + 1$ et $w(x) = x^2 + 3$

$v'(x) = 5$ $\quad w'(x) = 2x$

donc $i'(x) = 7 \times u'(x) \times e^{u(x)}$

$$i'(x) = 7 \times \left(\frac{5(x^2+3) - (5x+1)\times 2x}{(x^2+3)^2}\right) e^{\frac{5x+1}{x^2+3}} = 7 \times \left(\frac{-5x^2 - 2x + 15}{(x^2+3)^2}\right) e^{\frac{5x+1}{x^2+3}}$$

Exercice 7 : *(3 points)*

$A = (e^x - 1)^2 - (4e^x + 3)^2$

$= (e^{2x} - 2e^x + 1) - (16\,e^{2x} + 24\,e^x + 9)$ on utilise les identités remarquables $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= e^{2x} - 2e^x + 1 - 16\,e^{2x} - 24\,e^x - 9$ on change les signes des termes situés dans la parenthèse précédée d'un signe –

$= -15\,e^{2x} - 26\,e^x - 8$

@$B = (e^x + e^{-x})^2 - (4e^x - 2e^{-x})(2e^x + 3e^{-x})$

$= (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (8\,e^{2x} + 12 - 4 - 6e^{-2x})$ identité remarquable et double–distributivité $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$

$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 8\,e^{2x} - 12 + 4 + 6e^{-2x}$

$= -7e^{2x} - 6 + 7e^{-2x}$

Bonus :

Soit P un polynôme défini sur les réels par $P(x) = 4x^3 - 9x^2 + 9x - 14$.

1. Justifier que P puisse s'écrire sous la forme $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ avec a, b et c des réels

   On peut factoriser par $(x - 2)$ si 2 est racine du polynôme donc si $P(2) = 0$
   $P(2) = 4 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 9 \times 2 - 14 = 32 - 36 + 18 - 14 = 0$
   donc 2 est racine de P donc P est factorisable et $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
   La seconde parenthèse contient un polynôme de degré 2 car P est de degré 3.

2. Déterminer les valeurs a, b et c.
   $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

   Or $P(x) = 4x^3 - 9x^2 + 9x - 14$.

   Par identification des polynômes, on obtient le système suivant :

   $$\begin{cases} a = 4 \\ b - 2a = -9 \\ c - 2b = 9 \\ -2c = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -9 + 8 = -1 \\ c = 9 - 2 = 7 \\ -2c = -2 \times 7 = -14 \end{cases}$$

   donc $a = 4$; $b = -1$; $c = 7$ et $P(x) = (x - 2)(4x^2 - x + 7)$