LES SUITES : Révisions et principe de récurrence

I. Définitions, notations :

1) Définition :

Une suite numérique est une liste ordonnée (et infinie) de nombres réels.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Le nombre $u(n)$ sera noté u_n par commodité.

Une suite est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si le premier indice est 0, $(u_n)_{n\geq n_0}$ si le premier indice est n_0.

Un terme de la suite est noté u_n (sans parenthèse).

Les termes u_n et u_{n+1} sont deux termes consécutifs.

Exercice : Le premier terme d'une suite est $v_3 = 10$.
Ne pas confondre la position, la notation et la valeur d'un terme.

Le premier terme de cette suite est noté v_3 et vaut 10.

Le dixième terme sera noté v_{12}

v_{40} est le trente-huitième terme de cette suite.

La valeur de v_4 est la valeur du 2è terme de la suite (on ne peut pas la calculer)

La valeur de v_2 n'existe pas car le premier terme de la suite est v_3

Remarque : Quand on transmet une suite on doit donner le moyen de calculer tous ses termes.
Communiquer le premier ou même les dix premiers ne suffit pas !

2) Mode de génération d'une suite :

Forme explicite : " une formule avec n "

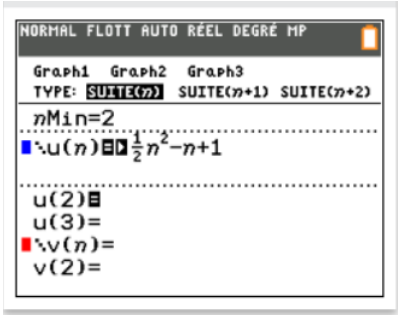
La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \frac{1}{2} n^2 - n + 1$ (on dit que c'est l'expression du terme général u_n)

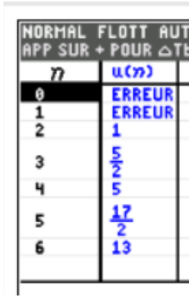
Exemple : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

- le premier terme de cette suite est noté u_2 ; il vaut $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 + 1 = 1$ donc $u_2 = 1$
- le dixième terme de cette suite est noté u_{11} ; il vaut $f(11) = \frac{1}{2} \times 11^2 - 11 + 1 = 50,5$ donc $u_{11} = 50,5$
- u_{40} est le trente neuvième terme de cette suite

et on a $u_{40} = f(40) = \frac{1}{2} \times 40^2 - 40 + 1 = 761$ donc $u_{40} = 761$

- Utilisation de la calculette





puis aller dans la table pour avoir la liste des termes.

Forme récurrente :

Une suite est définie **par récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme quelconque à partir du terme précédent.
On donne donc l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
Cette relation est appelée **relation de récurrence.**

Exemple : Le premier terme d'une suite est $u_3 = 4$ et on sait aussi que $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$
Il faut lire cette écriture en français :
" on passe d'un terme au suivant en le multipliant par 2 puis en retranchant 3 "

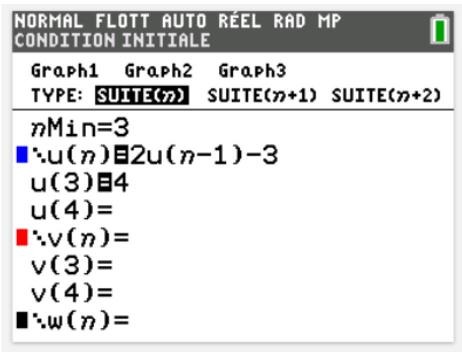
Dans cet exemple $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = 2x - 3$.

- le premier terme de cette suite est noté u_3 ; il vaut 4
- le dixième terme de cette suite est noté u_{12} ; il vaut $f(u_{11}) = 2 \times u_{11} - 3 = 515$
- u_{40} est le 38è terme de cette suite

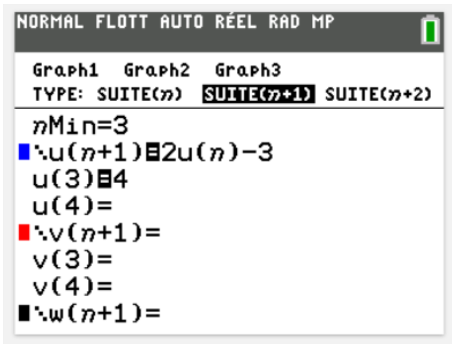
et on a $u_{40} = f(u_{39}) = 2 \times u_{39} - 3 = 549\ 755\ 813\ 891$

Pour calculer un terme, il faut connaitre tous les termes précédents.

- Avec la calculette :



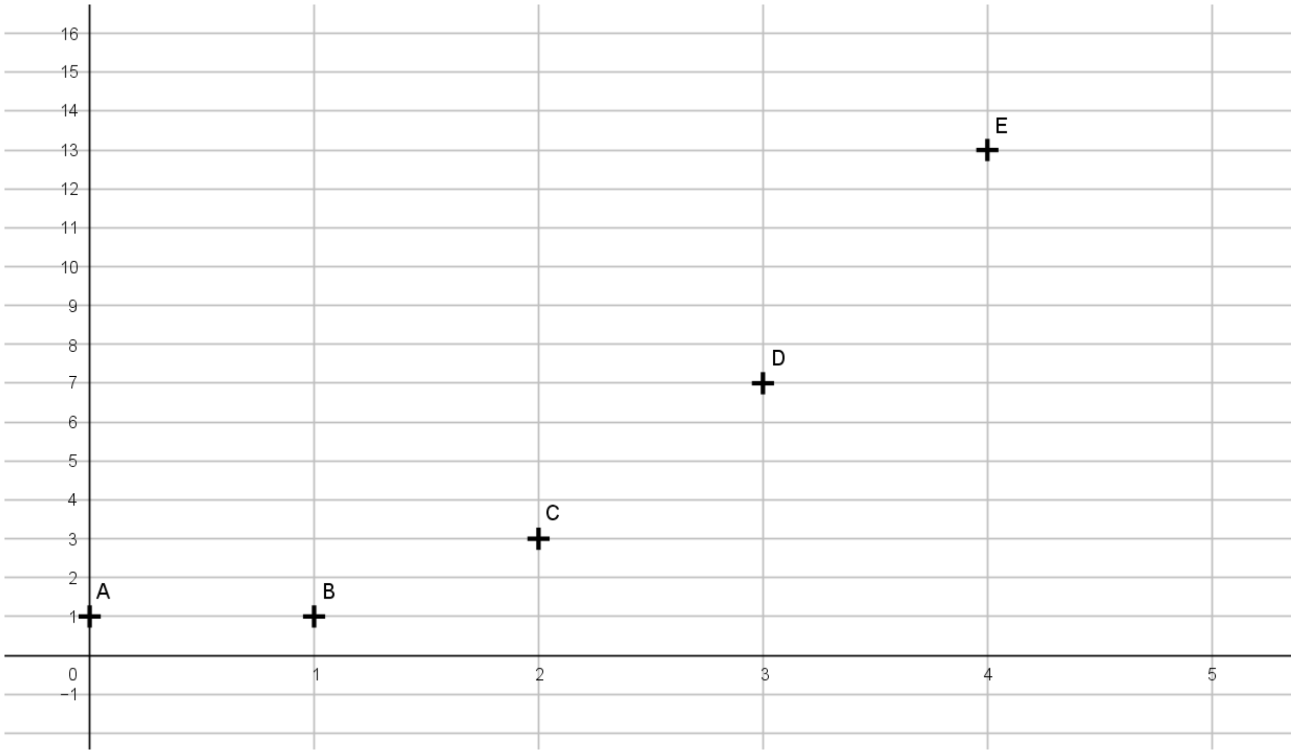
ou



3) Représentation graphique d'une suite :

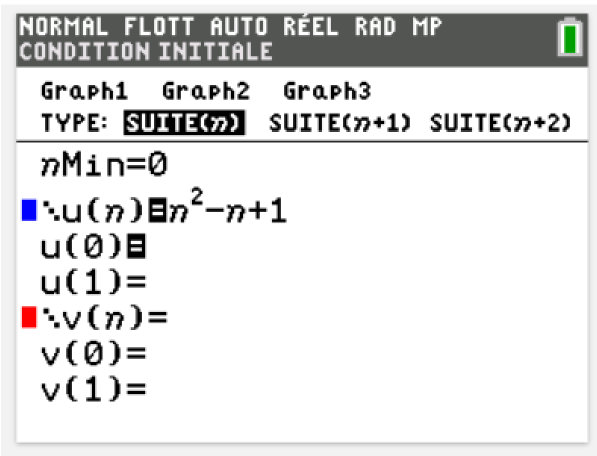
➢ Pour toutes les suites on peut placer dans un repère les points de coordonnées (n ; u_n).

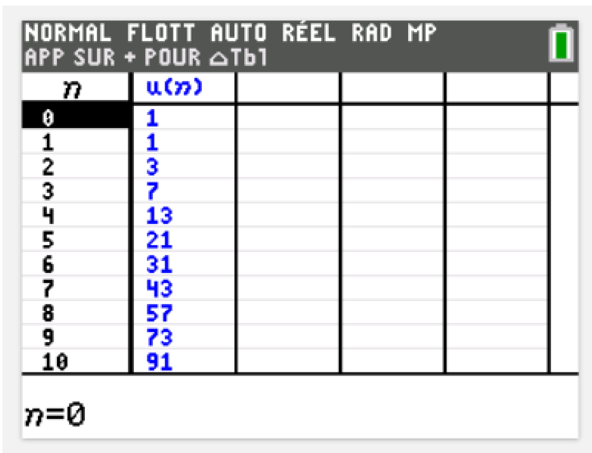
<u>Exemple :</u> Représenter dans le plan la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 - n + 1$



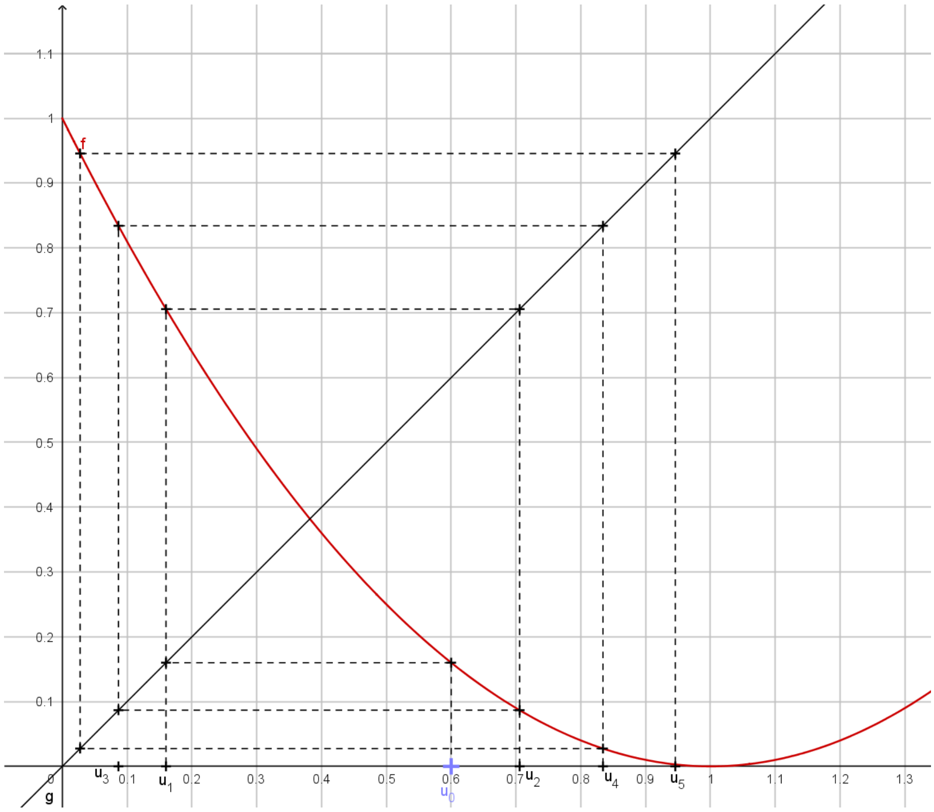
A(0 ; u_0) et $u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ donc A(0 ; 1)
B(1 ; u_1) et $u_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$ donc B(1 ; 1)
C(2 ; u_2) et $u_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$ donc C(2 ; 3)
D(3 ; u_3) et $u_3 = 3^2 - 3 + 1 = 7$ donc D(3 ; 7)
E(4 ; u_4) et $u_4 = 4^2 - 4 + 1 = 13$ donc E(4 ; 13)

ATTENTION ! On ne trace pas de courbe !

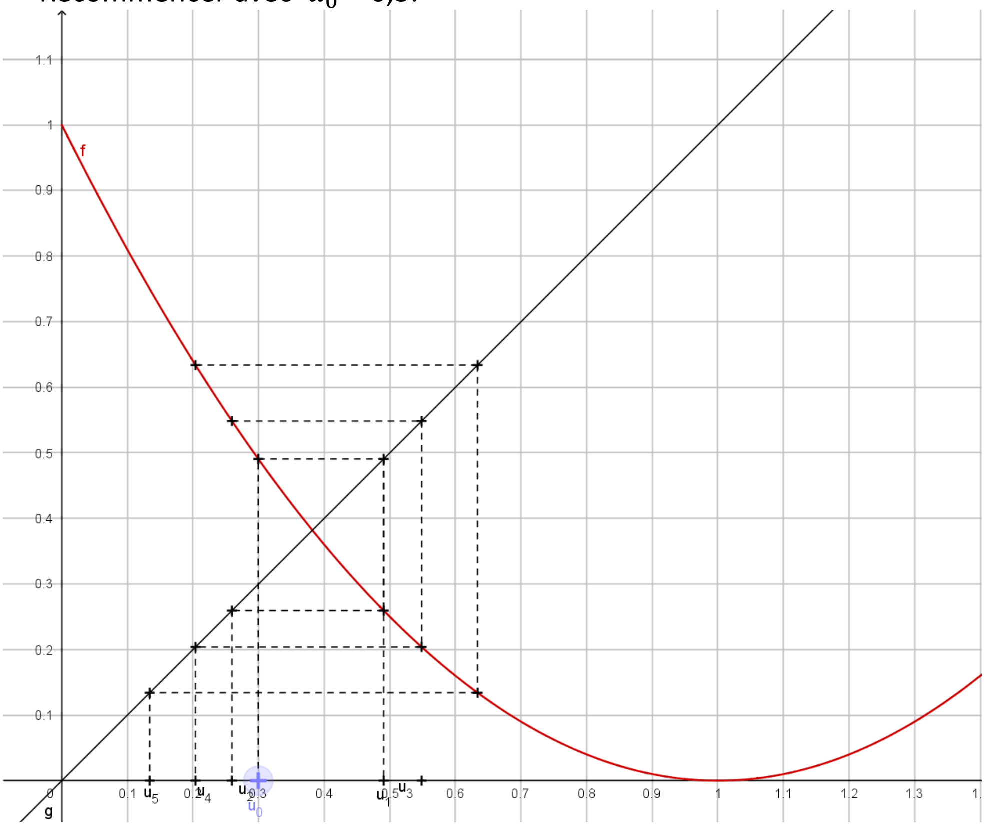




- Pour les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f\ (u_n)$, on peut facilement construire l'évolution des termes sur l'axe des abscisses quand on connait la courbe représentative de la fonction f .
  <u>Exemple</u> : Représenter dans le plan la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f\ (u_n)$
  avec $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $u_0 = 0{,}6$.



Recommencer avec $u_0 = 0{,}3$.



4) Variations d'une suite :

- Une suite est croissante lorsque pour toute valeur de $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$

- Une suite est décroissante lorsque pour toute valeur de $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n+1}$

- Une suite est constante lorsque ses termes sont tous égaux.

Il y a donc nécessité de comparer deux termes consécutifs quelconques.
L'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs, soit $u_{n+1} - u_n$ permet de conclure.
En effet si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ par exemple, on en conclura que $u_{n+1} \geq u_n$.

<u>Exercice :</u> Déterminer les variations de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par $v_n = 3n + 1$.

pour n quelconque $n \geq 2$ on a :

$v_{n+1} - v_n = 3(\; + 1) + 1 - (3n + 1) = 3n + 3 + 1 - 3n - 1 = 3$ et $3 > 0$,

donc la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

Lorsque **tous** les termes d'une suite sont **non nuls** et **de même signe**, si on arrive à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, on peut aussi conclure.
En effet, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ on en conclura que $u_{n+1} \geq u_n$.

Mais attention, il faudra être capable de justifier que tous les termes de la suite sont non nuls et de même signe ce qui n'est pas toujours évident.

Pour une suite explicite $u_n = f(n)$, les variations de f sur l'intervalle $[n_0 ; +\infty[$ permettent de conclure.
En effet , si f est strictement **croissante** sur l'intervalle $[n_0 ; +\infty[$, on peut écrire que l'on a $n < n + 1$ donc $f(n) < f(n + 1)$ car f ne perturbe pas l'ordre d'où $u_n < u_{n+1}$.

II. Suites arithmétiques :

Définition :

On dit qu'une suite est **arithmétique** quand on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours la même valeur** que l'on appellera **la raison** et que l'on notera **r**.

Ainsi (u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow$ pour toute valeur de $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} = u_n + r$

$\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n$ est une constante égale à la raison r .

Lien entre deux termes quelconques : Exercices basiques:

Soient u_m et u_p deux termes quelconques d'une suite arithmétique (u_n).
L'égalité $u_m = u_p + (m - p) \times r$ est vraie .

Sens de variation d'une suite arithmétique

Si (u_n) est arithmétique alors $u_{n+1} - u_n = r$ donc son sens de variation dépend du signe de la raison.
Si r est strictement positif la suite (u_n) est strictement croissante
Si r est nul la suite (u_n) est constante
Si r est strictement négatif la suite (u_n) est strictement décroissante

Représentation graphique d'une suite arithmétique

Si (u_n) est arithmétique alors $u_n = u_0 + n\,r = r\,n + u_0$ donc les points de sa représentation graphique sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r et l'ordonnée à l'origine u_0.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit S la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (somme écrite dans l'ordre des termes de la suite), on peut calculer S de la façon suivante :

$$S = \frac{\text{premier terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}}{2} \times \text{nombre de termes de la somme}$$

Exercices basiques:

1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n = -2n + 1$ est une suite arithmétique.
En déduire son sens de variation.

pour n quelconque $n \geq 2$ on a :

$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 1 - (-2n+1) = -2n - 2 + 1 + 2n - 1 = -2.$

-2 une constante donc cette suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est arithmétique de raison -2.
La raison est négative donc la suite est décroissante.

2) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison r = 4,3.
Déterminer u_{10} puis donner l'expression du terme général u_n en fonction de n.

$u_{10} = u_1 + (10 - 1) \times 4{,}3 = 4 + 9 \times 4{,}3 = 42{,}7$

$u_n = u_1 + (- 1) \times 4{,}3 = 4 + 4{,}3\,n - 4{,}3 = 4{,}3\,n - 0{,}3$

3) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_3 = 11{,}5$ et de raison 4.
Déterminer $S = u_3 + u_4 + u_5 + \ldots\ldots\ldots + u_{50}$

Il y a $50 - 3 + 1$ termes dans cette somme. Le premier est $u_3 = 11{,}5$

Le dernier est $u_{50} = u_3 + (50 - 3) \times 4 = 11{,}5 + 47 \times 4 = 199{,}5$

Alors $S = \dfrac{11{,}5 + 199{,}5}{2} \times 47 = 4\,958{,}5$

4) Calculer $S = 35 + 40 + 45 + 50 + \ldots\ldots\ldots + 1000$

On a une suite arithmétique de raison 5.

Il y a donc $\dfrac{1000 - 35}{5} + 1 = 194$ termes dans cette somme.

Le premier est 35 . Le dernier est 1000.

Alors $S = \dfrac{35 + 1000}{2} \times 194 = 100\,395$

5) Calculer $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + n$.

- en utilisant la formule ci-dessus :

On a une suite arithmétique de raison 1.
Il y a n termes dans cette somme. Le premier est 1. Le dernier est n.

Alors $S = \dfrac{1 + n}{2} \times n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- démontrons le !

on a $S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) + n$.

on a aussi $S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots + 2 + 1$.

Alors $S + S = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + \ldots\ldots\ldots + (n-1+2) + (n+1)$

soit $S + S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots\ldots\ldots + (n+1) + (n+1)$

soit $2S = (n+1) \times$ (le nombre de termes égaux à $n+1$) .

soit $2S = (n+1) \times n$.

On retrouve $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

III. Suites géométriques :

Définition :

On dit qu'une suite est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par la même valeur** que l'on appellera **la raison** et que l'on notera **q**.

Ainsi (u_n) est géométrique $\Leftrightarrow$ pour toute valeur de $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} = u_n \times q$

Lien entre deux termes quelconques :

Soient u_m et u_p deux termes quelconques d'une suite arithmétique (u_n).
L'égalité $u_m = u_p \times q^{m-p}$ est vraie .

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit S une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ≠ 1 (somme écrite dans l'ordre des termes de la suite), on peur calculer S de la façon suivante :

$$S = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1-q}$$

$$= \frac{\text{premier terme de la somme} - \text{dernier terme de la somme} \times \text{raison}}{1-\text{raison}}$$

Exemples basiques :

1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$ est une suite géométrique.

Etudier ses variations.

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1-2}} = \frac{2 \times 2^{n+1}}{3 \times 3^{n-2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = \frac{2}{3} \times u_n$$

ce qui prouve que cette suite est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_2 = \frac{2^3}{3^0} = 8$

Pour étudier les variations on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ puis on étudie son signe

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}} - \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}} - \frac{2^{n+1} \times 3}{3^{n-2} \times 3} = \frac{2^{n+1} \times (2-3)}{3^{n-1}} = \frac{2^{n+1} \times (-1)}{3^{n-1}}$$

Etude du signe : $2^{n+1} > 0$; $3^{n-1} > 0$ et $-3 < 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2) $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison q = 2.
Déterminer u_{10} puis donner l'expression du terme général u_n en fonction de n.

On a $u_{10} = u_1 \times 2^{10-1} = 6 \times 2^9 = 3072.$

et $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 6 \times 2^{n-1} = 6 \times \frac{2^n}{2} = 3 \times 2^n$

3) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_2 = 12$ et de raison 1,5.
Déterminer $S = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{11}$

On a $S = u_2 \times \frac{1-1{,}5^{11-2+1}}{1-1{,}5} = 12 \times \frac{1-1{,}5^{10}}{-0{,}5} = 12 \times \frac{58025}{512} = \frac{174075}{128} \approx 1360$

ou $S = \frac{u_2 - u_{11} \times 1{,}5}{1-1{,}5} = \frac{12 - 12 \times 1{,}5^9 \times 1{,}5}{-0{,}5} = -\frac{12 - 12 \times 1{,}5^{10}}{0{,}5} = -24 + 24 \times 1{,}5^{10} = \frac{174075}{128} \approx 1360$

4) Calculer S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2048

On a une suite géométrique de raison 2.

$$S = \frac{1-2048\times 2}{1-2} = \frac{1-4096}{-1} = 4095$$

5) Exprimer plus simplement $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots\ldots + x^n$
(avec $x \neq 1$)

• en utilisant la formule ci-dessus :

$$S = \frac{1-x^n\times x}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

• démontrons le !

$(1-x)\times S = S - x\times S$

$$= \left.\begin{matrix} S \\ -x\times S \end{matrix}\right\}$$ (écrivons le calcul sur deux lignes)

$$= \left.\begin{matrix} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots\ldots + x^n \\ -x\times(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots\ldots + x^n) \end{matrix}\right\}$$

$$= \left.\begin{matrix} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots\ldots + x^n \\ -x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 + \ldots\ldots\ldots - x^n - x^{n+1} \end{matrix}\right\}$$

$= 1 - x^{n+1}$

Ainsi $(1-x)\times S = 1 - x^{n+1}$ soit $S = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

IV. Principe général du raisonnement par récurrence :

1ere approche :

C'est un raisonnement " de proche en proche " qu'on a déjà utilisé de manière intuitive pour les suites arithmétiques et géométriques (démonstration de $u_n = u_0 + n\,r$ et de $u_n = u_0 \times q^n$).
C'est le principe d'un château de dominos :

- si on pousse un domino, le suivant tombe, et le suivant du suivant et tous les autres
- mais il faut pousser un premier domino, sinon rien ne tombe...

Principe :
Pour démontrer par récurrence qu'une propriété Pn est vraie pour tout *n*, on utilise 3 étapes:

1) Initialisation :
On vérifie que la propriété est vraie au premier rang, pour $n = 0$ (ou $n = 1, 2....$) .
On a alors : P_0 est vraie (ou P_1 , P_2 …) .

2) Hérédité :
En supposant que la propriété est vraie pour un nombre $n = k$ (hypothèse de travail P_k est vraie), on démontre qu'elle est dans ce cas vraie pour le rang $k + 1$.
On a alors : Si P_k est vraie pour un certain k , alors P_{k+1} est vraie.

3) Conclusion :
Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* .

Exemple :
On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 0{,}2\, u_n - 3$.
On veut démontrer par récurrence que pour tout *n* on a alors $u_n \geq -3{,}75$. Cette relation est P_n.

1) Initialisation
Pour $n = 0$, P_0 est $u_0 \geq -3{,}75$ or $u_0 = 6$ et $6 \geq -3{,}75$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
P_0 est vraie.

2) Hérédité
Supposons qu'il existe un entier naturel k pour lequel P_k est vraie c'est-à-dire que $u_k \geq -3{,}75$.
Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq -3{,}75$.
D'après la définition de la suite, $u_{k+1} = 0{,}2\, u_k - 3$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} u_k \geq -3{,}75 &\Leftrightarrow 0{,}2\, u_k \geq 0{,}2 \times (-3{,}75) \\ &\Leftrightarrow 0{,}2\, u_k - 3 \geq -0{,}75 - 3 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \geq -3{,}75 \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vérifiée.

3) Conclusion :
Comme la propriété est vraie pour $n = 0$, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* .
On a donc, pour tout n entier naturel, $u_n \geq -3{,}75$.