# CHAPITRE 2 COMPLEMENTS SUR LA DERIVATION

## I. Fonctions composées :

### 1) Définition :

**La fonction composée de v par u, notée $v \circ u$ , est définie pour tout $x$ d'un intervalle I par ,**
**$v \circ u\,(x) = v\,(\,u(x)\,)$.**

### 2) Exemples :

On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$ .

1) Déterminer l'expression de $v \circ u(x)$.

$$v \circ u(x) = v\,(\,x^2 + 4\,) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

2) Quel est l'ensemble de définition de $v \circ u$ ?

$v \circ u\,(x) = v\,(\,u(x)\,)$.
Il faut donc que $u(x)$ soit positif pour pouvoir en calculer la racine carrée.
$u(x) = x^2 + 4$ $u(x)$ est strictement positif car $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 4 \geq 4 > 0$.
Donc $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'expression de $u \circ v(x)$.

$$u \circ v(x) = u\,(\,\sqrt{x}\,) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 4 = x + 4$$

4) Quel est l'ensemble de définition de $u \circ v$ ?

$u \circ v\,(x) = u\,(\,v(x)\,)$.
Il faut donc que $x$ soit positif pour pouvoir en calculer la racine carrée.
Donc $u \circ v$ est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

### 3) Dérivation d'une fonction composée :

**Si u est une fonction dérivable en a et v une fonction dérivable en u(a)**
**alors $v \circ u$ est dérivable en a et $(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(\,u(a)\,)$.**

<u>Exemple :</u> On donne $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$ .

1) Déterminer $(\,v \circ u\,)'(x)$

$$(\,v \circ u\,)'\,(x) = u'(x) \times v'\,(\,u(x)\,) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

2) Déterminer $(\,u \circ v\,)'(x)$.

$$(\,u \circ v\,)'(x) = v'(x) \times u'\,(\,v(x)\,) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} = 1$$

ou $u \circ v(x) = x + 4$ donc $(\,u \circ v\,)'(x) = 1$

Conséquences :

$( e^u)' = u'(x) \times e^u$

$( u^n )' = n \times u' \times u^{n-1}$ **En particulier :** $( u^2 )' = 2 u' u$ **et** $(u^3)' = 3 u' u^2$

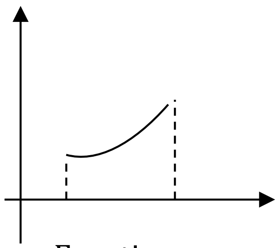
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$( \sqrt{u} )' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

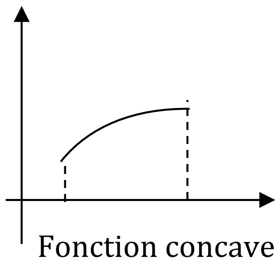
# II. CONVEXITE :

## 1) Introduction :

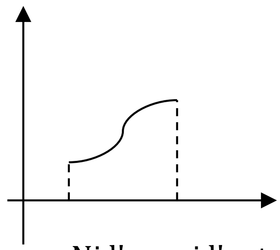
La notion de convexité va nous permettre de mieux connaitre les caractéristiques d'une courbe. En effet, si une fonction est croissante sur un intervalle [a ; b], on peut avoir plusieurs types de courbes.



Fonction convexe



Fonction concave



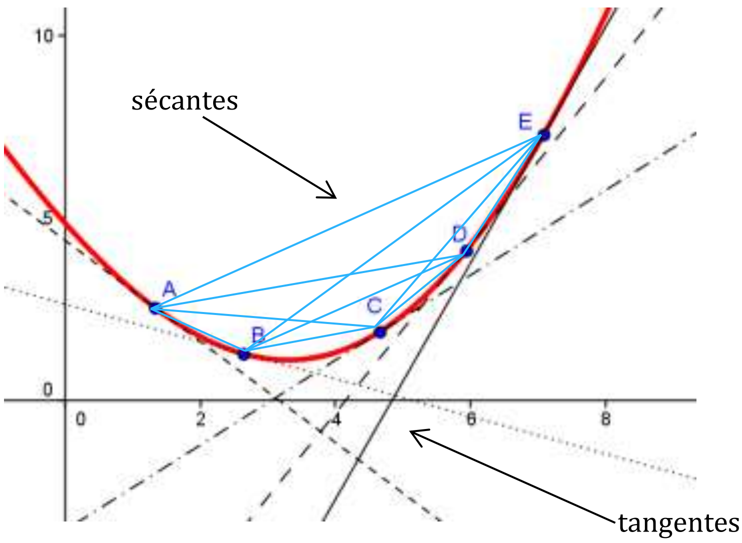
Ni l'un, ni l'autre

## 2) Définitions :

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

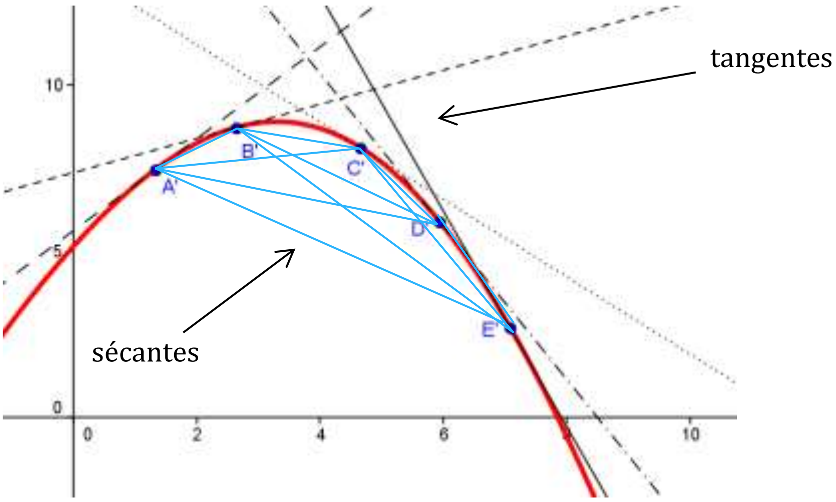
**On dira que $f$ est une fonction <u>convexe</u> sur I si la totalité de la courbe représentative de $f$ est située <u>en dessous</u> de chacune de ses sécantes ( droites passant par deux points quelconques de la courbe )**

**On dira que $f$ est une fonction <u>convexe</u> sur I si la totalité de la courbe représentative de $f$ est située <u>au dessus</u> de chacune de ses tangentes.**



**On dira que $f$ est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de $f$ est située au dessus de chacune de ses sécantes ( droites passant par deux points quelconques de la courbe )**

**On dira que $f$ est une fonction concave sur I si la totalité de la courbe représentative de $f$ est située en dessous de chacune de ses tangentes.**




## 3) Convexité et fonction dérivée seconde :

**$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.**

**$f$ est convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ pour tout $x$ de I $\Leftrightarrow$ $f'$ est une fonction croissante sur I.**

**$f$ est concave sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ pour tout $x$ de I $\Leftrightarrow$ $f'$ est une fonction décroissante sur I.**

## 4) Exemples :

a) Etudier la convexité de la fonction carré : $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x$ ; $f''(x) = 2$ $\quad f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

**La fonction carré est donc convexe sur $\mathbb{R}$.**

b) Etudier la convexité de la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-1 \times -\frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Signe de $f''(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ : $x > 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

**La fonction racine carrée est donc concave sur [ 0 ; + ∞ [.**

c) Etudier la convexité de la fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$ ; $f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

**La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$ .**

d) Etudier la convexité de la fonction cube : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$ ; $f''(x) = 6x$ $f''(x) \geq 0$ sur $[\,0\,;+\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;0\,]$ .

**La fonction cube est donc convexe sur $[\,0\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;0\,]$ .**

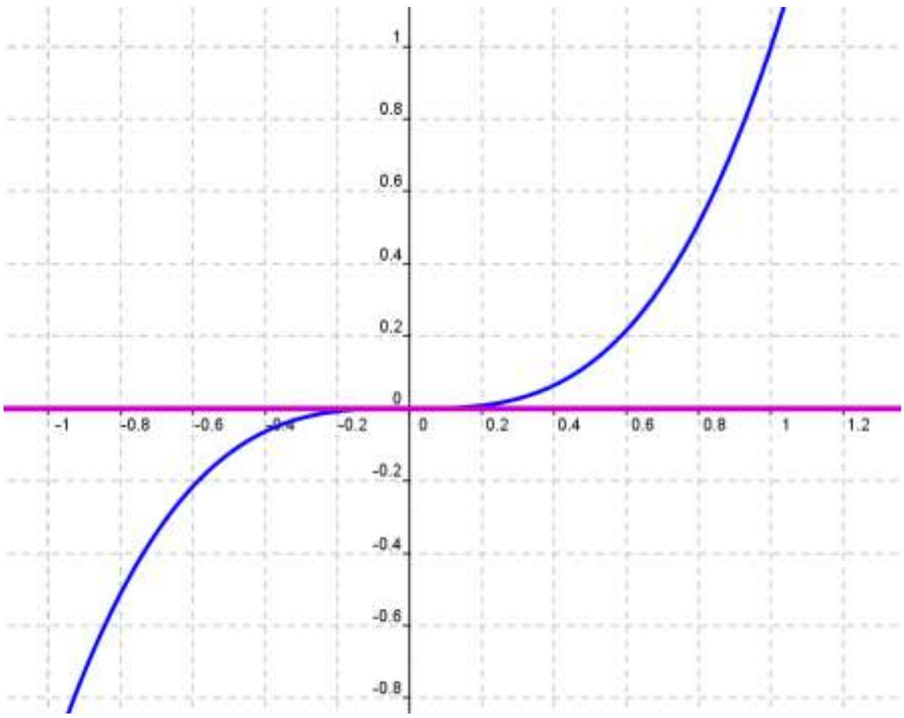
## III. EXPLOITATION DE LA CONVEXITE :

### 1) Point d'inflexion :

**$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a $\in$ I.**
**Dire que A ( a ; $f$(a) ) est un point d'inflexion de la courbe représentative de $f$ signifie que , en A , la courbe traverse sa tangente.**
**Conséquences : En a , la courbe passe de convexe à concave ou vice-versa.**
**En a, la dérivée seconde s'annule et change de signe.**

Exemple : La fonction cube admet–elle un point d'inflexion ?

La fonction cube admet en (0;0) un point d'inflexion.
En effet $f''(x) = 6x$ ; $f''(x) \geq 0$ sur $[\,0\,;+\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;0\,]$ .
La tangente en 0 est la droite d'équation y = 0 donc l'axe des abscisses.



## 2) Inégalités de convexité :

**Si $f$ est une fonction convexe sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I,**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

**Si $f$ est une fonction concave sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I,**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Applications :

1) Etablir l'inégalité de convexité

a) pour la fonction exponentielle :

$f'(x) = e^x$ ; $f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Donc si a et b sont deux réels, $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a+e^b}{2}$.

b) pour la fonction cube :

$f'(x) = 3x^2$ ; $f''(x) = 6x$ $f''(x) \geq 0$ sur $[\,0\,;+\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;0\,]$ .

La fonction cube est donc convexe sur $[\,0\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;0\,]$.

Si a et b sont des nombres réels positifs, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Si a et b sont des nombres réels négatifs, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geq \frac{a^3+b^3}{2}$

2) démontrer que $e^x \geq 1 + x$

Equation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0 :

$y = e^0\,(x - 0) + e^0$ donc $y = x + 1$

$f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est donc au-dessus de ces tangentes sur $\mathbb{R}$.

donc $e^x \geq 1 + x$ .