

I. Suites numériques : vocabulaire et définitions :

1) Définition :

Une suite numérique u est une fonction définie de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , qui, à tout entier naturel n , associe son image $u(n)$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on a choisi de noter u_n (se lit "u indice n") à la place de $u(n)$.

2) Remarques :

Quand une suite est définie sur \mathbb{N} , le premier entier ayant une image par u est $n = 0$.

On dira que le premier terme de la suite est u_0 .

u_1 sera alors le *deuxième* terme de la suite, u_2 sera le *troisième* terme de la suite,

u_8 sera le *neuvième* terme de la suite etc...

Quand une suite est définie sur \mathbb{N}^* ou $\mathbb{N} - \{0\}$, le premier entier ayant une image par u est $n = 1$.

On dira que le premier terme de la suite est u_1 . **ATTENTION ! Dans ce cas, u_0 n'existe pas !**

u_2 sera alors le *deuxième* terme de la suite, u_3 sera le *troisième* terme de la suite,

u_{12} sera le *douzième* terme de la suite etc...

Dans la phrase " u_9 est le dixième terme de la suite, on a $u_9 = 20$ ",

9 est l'indice du terme

10 est le rang du terme, la position du terme dans la suite

20 est la valeur du terme u_9

Exemple : Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} . Son premier terme vaut 10.

1) Quel est l'indice du premier terme ? *Le premier terme a pour indice $n = 0$*

2) Quelle égalité peut-on alors écrire ? *$u_0 = 10$*

3) On donne alors les termes suivants : 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24.

a) Combien vaut u_5 ? *$u_5 = 20$*

b) Combien vaut le quatrième terme ? *Le quatrième terme vaut 16. $u_3 = 16$*

c) De quelle terme 22 est-il la valeur ? *22 est la valeur de u_6 , le septième terme.*

3) Vocabulaire et notation :

L'ensemble des termes d'une suite, et par extension, la suite elle-même, est noté (u_n) .
Une suite est en général nommée avec les lettres u , v ou w .

Si u_n est un terme de la suite (u_n) , le terme précédent se notera u_{n-1} et le terme suivant u_{n+1} .
Par exemple, le terme précédent u_5 est u_4 et le terme suivant u_5 est u_6 .
 u_4 , u_5 et u_6 sont des termes **consécutifs** (des termes qui *se suivent*).

Une suite numérique n'est qu'une suite de nombres qui ont un lien entre eux et qui sont rangés dans un ordre précis.

Exemple : On donne les 4 premiers termes d'une suite (u_n) .

2 ; 6 ; 18 ; 54

- 1) Trouver le lien qui existe entre eux. *On passe d'un terme à l'autre en multipliant par 3.*
- 2) Donner le cinquième et le huitième terme.

$54 \times 3 = 162$ *le cinquième terme vaut 162*

$162 \times 3 = 486$ *le sixième terme vaut 486*

$486 \times 3 = 1458$ *le septième terme vaut 1458*

$1458 \times 3 = 4374$ *le huitième terme vaut 4374*

II. Mode de génération d'une suite :

La plupart des suites ne sont pas définies par la donnée de leurs premiers termes...

1) Suite définie par une formule explicite:

Une suite (u_n) sera définie de manière explicite si il existe une fonction f telle que, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

Exemple : (u_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n - 2$.

Cela signifie que $f(n) = 3n - 2$.

Si on veut calculer u_5 , il suffit de calculer $f(5)$.

Et $f(5) = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2 = 13$ donc $u_5 = 13$.

Avantage de ce type de définition :

On peut calculer n'importe quel terme, sans forcément connaître les précédents !

2) Suite définie par une formule de récurrence :

Une suite (u_n) sera définie par récurrence si on donne son premier terme et une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du ou des termes précédents.

Exemple : (u_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

Cela signifie que pour calculer un terme, il faut *prendre le terme précédent, le multiplier par 2 et rajouter 5.*

Si on veut calculer u_1 , il suffit de calculer $2 \times u_0 + 5$. donc $u_1 = 2 \times 3 + 5 = 11$.

Si on veut calculer u_2 , il suffit de calculer $2 \times u_1 + 5$. donc $u_2 = 2 \times 11 + 5 = 27$.

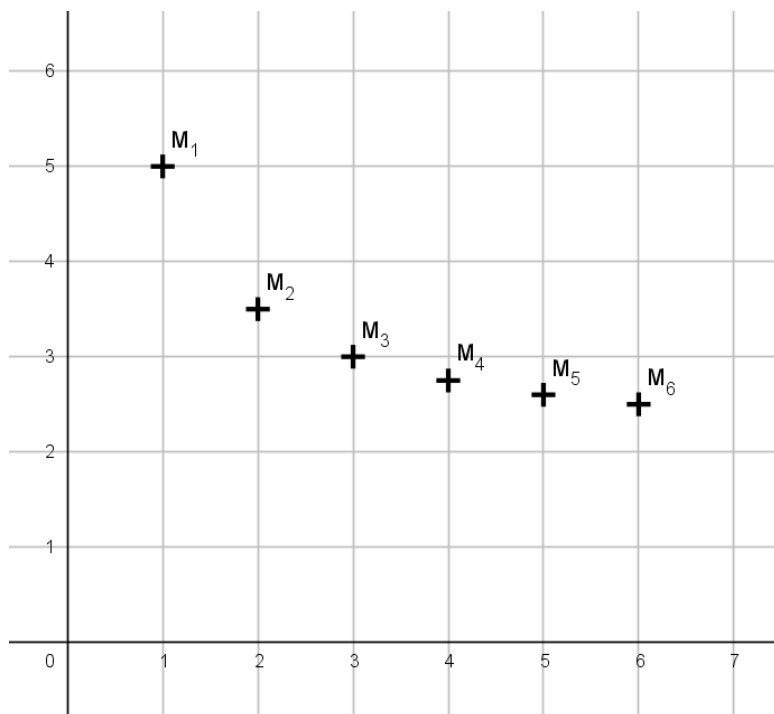
Inconvénient de ce type de définition :

Quand on veut calculer un terme, il faut forcément connaître les précédents !

III. Représentation graphique d'une suite :

Dans un repère du plan, on représente une suite en plaçant les points M_n de coordonnées $(n ; u_n)$. On obtient alors une représentation graphique appelée nuage de points.

Exemple : Dans le repère orthonormé ci-dessous, représenter les six premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \frac{3}{n} + 2$.



Points :

- $M_1 = (1, 5)$
- $M_2 = (2, 3.5)$
- $M_3 = (3, 3)$
- $M_4 = (4, 2.75)$
- $M_5 = (5, 2.6)$
- $M_6 = (6, 2.5)$

IV. Sens de variation d'une suite:

1) Définitions:

Une suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n .

Une suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n .

2) Conséquence:

Une suite (u_n) sera croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n .

Une suite (u_n) sera décroissante si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n .

3) Méthodes pour donner le sens de variations d'une suite :

- Graphiquement :

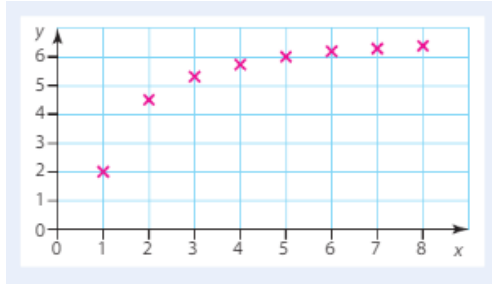
On ne peut qu'énoncer une conjecture lorsque l'on voit la représentation graphique d'une suite.

- Par le calcul :

Pour démontrer que $u_{n+1} < u_n$ ou que $u_{n+1} > u_n$, on va calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe. Pour ce faire, il faudra résoudre l'inéquation $u_{n+1} - u_n > 0$ ou étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n$ (si celui-ci est simple).

Exemples :

1) A partir du graphique, que peut-on conjecturer du sens de variation de la suite (u_n) ?



Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul

par $u_n = \frac{2n-1}{n}$.

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n+1) \times n - (2n-1) \times (n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 2n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur puis celui du dénominateur.

n est un entier naturel non nul donc il est strictement positif.

Donc $n(n+1)$ sera positif. 1 est positif.

Le quotient est donc le quotient d'un nombre positif par un nombre positif, il est donc positif.

Conclusion: $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

V. Utilisation de la calculette :

La calculette peut calculer les termes d'une suite et représenter le nuage de points.

Exemple : Déterminer les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

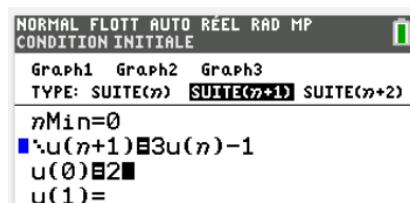
Se mettre en mode suite : MODE puis SUITE (sur la 4^è ligne)

Dans le menu $f(x)$ sélectionner SUITE(n+1)

nMin (contient la valeur du premier indice n) mettre 0

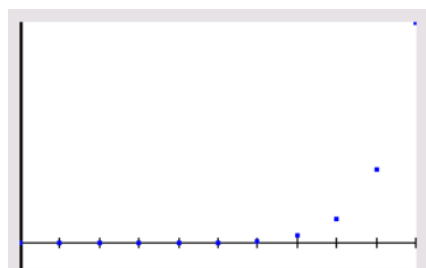
$u(n+1)=3 \times u(n) - 1$ u avec la touche 2nde 7 et n avec la touche x,T,θ,n

$u(0)=2$ puis ENTRER



Dans la table, on trouve les valeurs de tous les termes et dans graphe on voit le nuage de points.

n	u
0	2
1	5
2	14
3	41
4	122
5	365
6	1094
7	3281
8	9842
9	29525
10	88574



Mode de génération d'une suite :

- n° 70 page 25 Modéliser par une suite
- n° 71 page 25 Lire un programme
- n° 72 page 25 Modéliser par une suite
- n° 73 page 25 Modéliser par une suite
- n° 74 page 25 Modéliser par une suite
- n° 75 page 25 Lire un programme
- n° 77 page 25 Lire un programme
- n° 78 page 26 Tableur

Sens de variation d'une suite :

- n° 87 page 27 Variations
- n° 88 page 27 Variations
- n° 89 page 27 Variations
- n° 90 page 27 Problème complet

Problèmes complets :

- n° 109 page 29
- n° 110 page 31 Type BAC
- n° 111 page 31 Type BAC
- n° 112 page 31 Type BAC + algo
- n° 113 page 31 Type BAC
- n° 114 page 31 Calculatrice